Open bases and continuous mappings

Def

$(X, \mathfrak{G})$ top. space

$\mathbb{B} (\subset 2^X)$: <u>open base</u> of $(X, \mathfrak{G})$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} ① \ \mathbb{B} \subset \mathfrak{G} \\ ② \ {}^\forall G \in \mathfrak{G}, x \in G, \\ \qquad {}^\exists B \in \mathbb{B} : x \in B \subset G \end{cases}$

開基(底)

ex

$(X, \mathfrak{G})$ top. space

$\Rightarrow \mathfrak{G}$ is an open base of $(X, \mathfrak{G})$

Proof

① $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}$ OK

② ${}^\forall G \in \mathfrak{G}, x \in G,$

${}^\exists B \in \mathfrak{G} : x \in B \subset G$

(∵) Let $G \in \mathfrak{G}$ and $x \in G$.

Define $B \equiv G$.

Then, $\begin{cases} B(=G) \in \mathfrak{G} \\ x \in B(=G) \subset G. \end{cases}$

//

ex

$(X, \mathfrak{G})$ top. space

$\Rightarrow \mathfrak{G} \setminus \{\emptyset\}$: open base of $(X, \mathfrak{G})$

ex

$$\boxed{\begin{array}{l}(X, d)\ \text{MS} \\ \mathcal{S} \equiv \{S_r(x) \mid x \in X, r > 0\} \\ \Rightarrow \mathcal{S} \text{ is an open base of } (X, d).\end{array}}$$

Proof

① $\mathcal{S} \subset \mathfrak{G}$

i.e. $^\forall x \in X, r > 0,$

$S_r(x)$ is open in X.

OK.

② $^\forall G \in \mathfrak{G}, x \in G,$

$^\exists z \in X, r > 0 : x \in S_r(z) \subset G.$

(∵) Let $G \in \mathfrak{G}$ and $x \in G$.

Define $z \equiv x \in X$.

Then, $x \in S_r(x)\ (^\forall r > 0)$.

As $G \in \mathfrak{G}$ and $x \in G$,

$^\exists r > 0 : x \in S_r(x) \subset G.$

//

※ top. space における open base は、

MS における open sphere を一般化したもの。

ex

(X, d) MS

$\mathcal{S}' \equiv \{ S_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N} \}$

$\Rightarrow \mathcal{S}'$ is an open base of (X, d).

Proof

① $\mathcal{S}' \subset \mathfrak{G}$ OK.

② $\forall G \in \mathfrak{G},\ x \in G,$

$\exists z \in X,\ n \in \mathbb{N} : x \in S_{\frac{1}{n}}(x) \subset G.$

(∵) Let $G \in \mathfrak{G}$ and $x \in G$.

Define $z \equiv x \in X$.

It holds that

$\exists r > 0 :\ x \in S_r(x) \subset G.$

Let $\frac{1}{r} < n$, where $n \in \mathbb{N}$.

Then, $S_{\frac{1}{n}}(x) \subset S_r(x)$.

$\therefore x \in S_{\frac{1}{n}}(x) \left(\subset S_r(x) \right) \subset G.$

//

※ $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$

ex

$X = \{a, b, c, d, e\}$
with the discrete top.
$\mathbb{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$
$\Rightarrow$ $\mathbb{B}$ is an open base of X.

Proof

① $\mathbb{B} \subset \mathfrak{G}\ (= 2^X)$ OK

② $^\forall G \in \mathfrak{G},\ x \in G,$
$^\exists B_x \in \mathbb{B} : x \in B_x \subset G.$

$(\because)$ For $x \in G$, define $B_x = \{x\} \in \mathbb{B}$.
Then, $x \in B_x = \{x\} \subset G$.

//

※ $\mathbb{B}' = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\},$
$\underline{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}}\}$
$\Rightarrow$ $\mathbb{B}'$ is also an open base of X.

redundant

※ open base は要素の個数が少ない方がよい。

ex

$X = \{a, b, c, d, e\}$

$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$

$\mathbb{B}_1 = \mathcal{G} \setminus \{\emptyset\}$

$\mathbb{B}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, X\}$

$\Rightarrow \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$: open bases of $(X, \mathcal{G})$

Th

$(X, \mathfrak{G})$ top. space
$\mathbb{B} \subset \mathfrak{G}$
$\Rightarrow$ Equivalent
① $\mathbb{B}$: open base of $(X, \mathfrak{G})$
i.e. $\forall G \in \mathfrak{G}, x \in G,$
$\exists B_x \in \mathbb{B} : x \in B_x \subset G$
② $\forall G \in \mathfrak{G}, \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{B} : G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$

Proof

①⇒②

Let $G \in \mathfrak{G}$.
From ①, $\forall x \in G, \exists B_x \in \mathbb{B} : x \in B_x \subset G$.
Thus, we have $G = \bigcup_{x \in G} B_x$.

②⇒①

Let $G \in \mathfrak{G}$ and $x \in G$.
From ②, $\exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{B} : G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.
As $x \in G$, $\exists \lambda^* \in \Lambda : x \in B_{\lambda^*}$.
As $G \supset G_{\lambda^*}$, we obtain $x \in B_{\lambda^*} \subset G$.
//

※ open set は、open base のある部分族だけを用いて、それらの合併として再現される。

cf.

$(X, \mathfrak{G})$ top. space

$\mathbb{B} \subset 2^X$: open base of $(X, \mathfrak{G})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ \mathbb{B} \subset \mathfrak{G} \\ ② \ {}^\forall G \in \mathfrak{G}, {}^\exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{B} : \\ \qquad G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \end{cases}$

cf.

V $\mathbb{R}$-vector space

$\{x_1, \cdots, x_N\} \subset V$

<u>base</u> (<u>basis</u>) of V

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ \{x_1, \cdots, x_N\} : \text{linearly independent} \\ ② \ {}^\forall x \in V, {}^\exists \{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\} \subset \mathbb{R} : \\ \qquad x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_N x_N \end{cases}$

Review

X, Y MSs

- $f: X \to Y$ continuous at $x_0 \in X$

$\iff \forall_{\varepsilon > 0}, \exists_{\delta > 0}:$

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$\iff \forall_{\varepsilon > 0}, \exists_{\delta > 0}:$

$$x \in S_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$$

$\iff \forall_{\varepsilon > 0}, \exists_{\delta > 0}: f(S_\delta(x_0)) \subset S_\varepsilon(f(x_0)).$

- $f: X \to Y$ continuous (on X)

$\iff \forall_{x_0 \in X}, f:$ continuous at x_0.

Def.

$(X, \mathfrak{S}_X), (Y, \mathfrak{S}_Y)$ top. spaces

- $f: X \to Y$ <u>continuous</u> at $x_0 \in X$

$\iff$ $^\forall U \in \mathbb{U}(f(x_0))$, $^\exists V \in \mathbb{U}(x_0)$:

$$x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

$\iff$ $^\forall U \in \mathbb{U}(f(x_0))$, $^\exists V \in \mathbb{U}(x_0)$:

$$f(V) \subset U.$$

- $f: X \to Y$ <u>continuous</u> (on X).

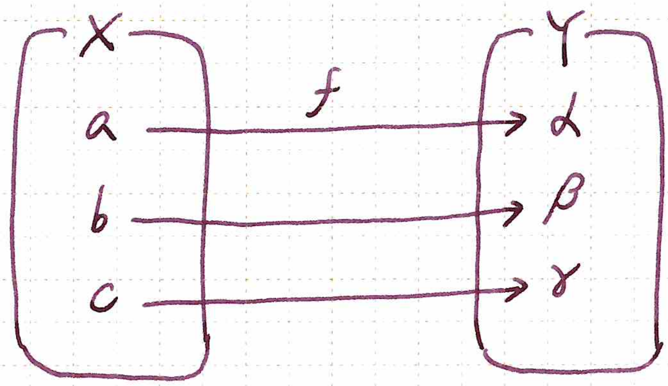
$\iff$ f: continuous at x_0 $^\forall x_0 \in X$.

- f is <u>not</u> continuous at $x_0 \in X$

$\iff$ $^\exists U \in \mathbb{U}(f(x_0))$; $^\forall V \in \mathbb{U}(x_0)$,

$$f(V) \not\subset U$$

ex



$$\mathfrak{O}_X = \{\emptyset, \{a\}, X\}$$

$$\mathfrak{O}_Y = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}, Y\}$$

$$f : (X, \mathfrak{O}_X) \to (Y, \mathfrak{O}_Y)$$

- f : continuous at a

$$\mathfrak{U}(a) = \{\{a\}, X\} \quad (\subset 2^X)$$

$$\mathfrak{U}(f(a)) = \mathfrak{U}(\alpha)$$

$$= \{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}, Y\} \quad (\subset 2^Y)$$

Then, $\forall U \in \mathfrak{U}(f(a))$,

$$\exists V \in \mathfrak{U}(a) : f(V) \subset U.$$

- f is <u>not</u> continuous at b

  $\mathcal{U}(b) = \{X\}$ $(\subset 2^X)$

  $\mathcal{U}(f(b)) = \mathcal{U}(\beta) = \{\{\alpha, \beta\}, Y\}$ $(\subset 2^Y)$

  Then, $\exists\, U = \{\alpha, \beta\} \in \mathcal{U}(f(b))$:

  $\forall V \in \mathcal{U}(b),\ f(V) \not\subset U.$

- f is continuous at c

  $\mathcal{U}(c) = \{X\}$ $(\subset 2^X)$

  $\mathcal{U}(f(c)) = \mathcal{U}(\gamma) = \{Y\}$ $(\subset 2^Y)$

  Then, $\forall U \in \mathcal{U}(f(c))$,

  $\exists\, V \in \mathcal{U}(c) : f(V) \subset U.$

Th

$(X, \mathcal{G}_X)$, $(Y, \mathcal{G}_Y)$ top. spaces

$f : X \to Y$

$\Rightarrow$ Equivalent

① f: continuous on X.

i.e. $^\forall x \in X$, $U \in \mathbb{U}(f(x))$,

$\exists V \in \mathbb{U}(x) : f(V) \subset U$

② $^\forall G \in \mathcal{G}_Y$, $f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X$

③ $^\forall B \in \mathbb{B}_Y$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}_X$

④ $^\forall F \in \mathbb{F}_Y$, $f^{-1}(F) \in \mathbb{F}_X$

where

$\mathbb{F}_X \, (\subset 2^X)$: the set that collects all closed sets of X

$\mathbb{F}_Y \, (\subset 2^Y)$

$\mathbb{B}_Y \, (\subset \mathcal{G}_Y)$: open base of Y

① ⇒ ②

Let $G \in \mathfrak{G}_Y$.

We prove that $f^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_X$.

i.e. $\forall x \in f^{-1}(G), \exists V \in \mathcal{U}(x) : V \subset f^{-1}(G)$

Let $x \in f^{-1}(G)$.

Then, $f(x) \in G$.

As $G \in \mathfrak{G}_Y$, it holds true that

$$G \in \mathcal{U}(f(x)).$$

From ①, $\exists V \in \mathcal{U}(x) : f(V) \subset G$.

Using this, we obtain

$$V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(G).$$

$\therefore \forall x \in f^{-1}(G), \exists V \in \mathcal{U}(x) : V \subset f^{-1}(G).$ ┘

② ⇒ ③

It obviously holds. ┘

③ → ④

Let $F \in \mathbb{F}_Y$.

We show that $f^{-1}(F) \in \mathbb{F}_X$.

i.e. $(f^{-1}(F))^c \in \mathbb{G}_X$.

As $F \in \mathbb{F}_Y$, we have $F^c \in \mathbb{G}_Y$,

and hence,

$$\exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{B}_Y : F^c = \bigcup_\lambda B_\lambda. \quad \text{— }(*)$$

From ③, $f^{-1}(B_\lambda) \in \mathbb{G}_X \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

$$\therefore \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda) \in \mathbb{G}_X. \quad \text{— }(**)$$

Using this, we have

$$\begin{aligned}(f^{-1}(F))^c &= f^{-1}(F^c) \\ &\overset{(*)}{=} f^{-1}\Big(\bigcup_\lambda B_\lambda\Big) \\ &= \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda) \underset{(**)}{\in} \mathbb{G}_X.\end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}(F) \in \mathbb{F}_X$. $\lrcorner$

④ ⇒ ①

Let $x \in X$ and $U \in \mathcal{U}(f(x))$.

i.e. $\begin{cases} (1) \ U \in \mathfrak{G}_Y \\ (2) \ f(x) \in U \end{cases}$

Our goal is to prove that

$\exists V \in \mathcal{U}(x) : f(V) \subset U$.

Define $V = f^{-1}(U)$ $(\subset X)$.

- $x \in V$

  From (2), $x \in f^{-1}(U) = V$. ⌟

- $V \in \mathfrak{G}_X$

  From (1), $U^c \in \mathbb{F}_Y$.

  From ④, $f^{-1}(U^c) \in \mathbb{F}_X$.

  $$f^{-1}(U^c) = \left(f^{-1}(U)\right)^c$$

  This shows that $f^{-1}(U) = V \in \mathfrak{G}_X$. ⌟

- $f(V) \subset U$.

  As $V = f^{-1}(U)$,

  $f(V) = f\left(f^{-1}(U)\right) \subset U$. ⌟

$\therefore V = f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x) : f(V) \subset U$.

//

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}(X, \mathfrak{G}_X)\\ (Y, \mathfrak{G}_Y)\\ (Z, \mathfrak{G}_Z)\end{array}\right\} \text{top. spaces} \\ \left.\begin{array}{l} f : X \to Y \\ g : Y \to Z \end{array}\right\} \text{continuous} \\ \Longrightarrow g \circ f : X \to Z \ \text{continuous} \end{array}}$$

<u>Proof</u>

We prove that $\underline{{}^{\forall} G \in \mathfrak{G}_Z,\ (g \circ f)^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_X.}$

Let $G \in \mathfrak{G}_Z$.

As g is continuous, $g^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_Y$.

Similarly, as f is continuous,

$$\underset{\displaystyle (g \circ f)^{-1}(G).}{\overset{\displaystyle f^{-1}\big(g^{-1}(G)\big)}{\Vert}} \in \mathfrak{G}_X.$$

This completes the proof.

//

Cor

X, Y, Z, W top. spaces

$f: X \to Y$
$g: Y \to Z$
$h: Z \to W$ continuous

$\Longrightarrow h \circ g \circ f : X \to W$
is also continuous.

$(X, \mathfrak{G}_X)$, $(Y, \mathfrak{G}_Y)$ top. spaces

$f : X \to Y$ constant mapping

i.e $f(x) = y_0 \quad \forall x \in X$

where $y_0 \in Y$

$\Rightarrow f$ is continuous

<u>Proof.</u>

We show that <u>$\forall G \in \mathfrak{G}_Y,\ f^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_X$.</u>

Let $G \in \mathfrak{G}_X$.

If $y_0 \in G$, then $f^{-1}(G) = X$.

If $y_0 \notin G$, then $f^{-1}(G) = \emptyset$.

Hence, we have $f^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_X$.

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ top. spaces

$f: X \to Y$

$\mathcal{O}_X$: discrete top. or

$\mathcal{O}_Y$: trivial top.

$\Rightarrow f$: continuous

Open bases and continuous mappings

1. 位相空間における開基の定義と例を述べよ.

2. 位相空間$(X, \boldsymbol{G})$において$\boldsymbol{B}$が開基であることは、条件

$$\forall G \in \boldsymbol{G},\ \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \boldsymbol{B} \text{ s.t. } G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

と同値である. このことを証明せよ.

3. X, Yを位相空間, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$とする.
(1) fがx_0において連続であること,
(2) fがXにおいて連続であること
の定義を述べ, グラフを用いて説明せよ.

4. X, Yを位相空間, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$とする.
(1) fがx_0において連続ではないこと,
(2) fがXにおいて連続ではないこと
について, 論理式とグラフを用いて説明せよ.

5. X, Yを位相空間, $f : X \to Y$とする. 次の4条件が同値であることを証明せよ.

(1) fはX上の連続関数である.
(2) Yの任意の開集合$G \in \mathbf{G}_Y$について, $f^{-1}(G)$がXの開集合になる.
(3) Yの開基$\mathbf{B}_Y$の任意の要素$B \in \mathbf{B}_Y$について, $f^{-1}(B)$がXの開集合になる.
(4) Yの任意の閉集合$F \in \mathbf{F}_Y$について, $f^{-1}(F)$がXの閉集合になる.

6. X, Y, Zを位相空間, 2つの写像$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$を連続とすると, これらの合成写像$g \circ f : X \to Z$も連続である. このことを, わざわざ証明を書くまでもなく納得できるまで考えてみよ.

7. 定値写像は連続である. このことを, わざわざ証明を書くまでもなく納得できるまで考えてみよ.

8. X, Yを位相空間, $f : X \to Y$とする. 定義域Xが離散位相空間か、またはYが密着位相空間だとすると, fは必ず連続になる. なぜか？

9. 2つの集合$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$について, それぞれの位相を

$$\boldsymbol{G}_X = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$$
$$\boldsymbol{G}_Y = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}, Y\}$$

とする. また, 写像$f : X \to Y$を$f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, $f(c) = \gamma$ と定める. 定義域の各点におけるこの写像fの連続性を調べよ.

10. 2つの集合を$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$とする. 問題9と同じ写像$f$について, 2点$a, b$では不連続で, cでは連続になるようなXとYの位相を考えよ.

11. 2つの集合を$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$とする. 問題9と同じ写像$f$について, fは連続だが, 逆写像$f^{-1} : Y \to X$は不連続になるようなXとYの位相を考えよ.

解答

9. 写像fは，点aでは不連続，bとcでは連続である．

10. 例えば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_X &= \{\emptyset, \{a, b\}, X\} \\ \boldsymbol{G}_Y &= \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}, Y\} \end{aligned}$$

とすればよい．

11. 例えば，$\boldsymbol{G}_X$ =離散位相，$\boldsymbol{G}_Y$ =密着位相とすればよい．また，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_X &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\} \\ \boldsymbol{G}_Y &= \{\emptyset, \{\alpha\}, Y\} \end{aligned}$$

としてもよい．