同時確率変数に関する期待値・分散、
2つの確率変数の共分散

期待値

(X, Y)の関数 $g(X, Y)$の期待値

(i) X, Y: discrete r.v.

$$E\left[g(X,Y)\right] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)\, p_{ij}$$

(ii) X, Y: continuous r.v.

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$$

where
$$\begin{cases} p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j) \\ f(x,y) : (X, Y) \text{ の jointly p.d.f.} \end{cases}$$

※ 実際に使うのは

$E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$, $E[Y^2]$, $E[XY]$

などである。

例.

$$g(X,Y) = X^2 Y$$

P_{ij} : jointly probability function

$X \backslash Y$	0	1	2
1	$1/8$	$1/8$	$2/8$
2	$1/8$	0	$3/8$

$$\boxed{E[g(X,Y)] = E[X^2 Y] = ?}$$

$$E[X^2Y] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{2} x_i^2 y_j P_{ij}$$

$$= 1^2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{8}$$

$$+ 2^2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot 1 \cdot 0 + 2^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + 3$$

$$= \frac{29}{8}$$

一変数についての期待値 $E[X]$, $E[Y]$ は，
周辺分布によってえられる期待値と一致する。

(i) X, Y : discrete r.v.

$$E[X] \equiv \sum_i \sum_j x_i P_{ij} \quad \text{where } P_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_i x_i \sum_j P_{ij}$$

$$= \sum_i x_i P_{i\cdot}$$

Xの周辺確率関数

Similarly, $E[Y] = \sum_j y_j P_{\cdot j}$.

(ii) X, Y : continuous r.v.

$$E[X] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} x f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} x \left[\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

Xの周辺密度関数

Similarly,

$$E[Y] = \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy .$$

<u>check</u> $(i=1,2\,;\ j=1,2)$

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i\,p_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\left(x_i\,p_{i1} + x_i\,p_{i2}\right) \\
&= \left(x_1 p_{11} + x_1 p_{12}\right) + \left(x_2 p_{21} + x_2 p_{22}\right) \\
&= x_1\left(p_{11} + p_{12}\right) + x_2\left(p_{21} + p_{22}\right) \\
&= x_1 p_{1\cdot} + x_2 p_{2\cdot} \\
&= \sum_{i=1}^{2} x_i\,p_{i\cdot}
\end{aligned}
$$

//

※ $E[X]$, $E[Y]$ だけではなく、一変数のみの関数
$g(X)$, $g(Y)$ についても同様。

$$
E[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_i g(x_i)\,p_{i\cdot} & \text{if } X : \text{discrete} \\ \displaystyle\int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx & \text{if } X : \text{continuous} \end{cases}
$$

※ $E[X^2]$, $E[Y^2]$ を分散の計算で使う。

例

X, Y: r.v.

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$1/8$	$1/8$	0	$1/4$
1	$1/8$	$2/8$	$1/8$	$1/2$
2	0	$1/8$	$1/8$	$1/4$
$p_{\cdot j}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} x_i \, p_{ij} = ?}$$

・定義に従って計算する。

$$\begin{aligned}
E[X] = \; & \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\
& + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 \\
& + 0 \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2
\end{aligned}$$

同類項をまとめている

$$\begin{aligned}
= \; & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 \right) \cdot 0 \\
& + \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \right) \cdot 1 \\
& + \left(0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) \cdot 2
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{8} \cdot 0 + \frac{4}{8} \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 2 = 1$$

・周辺分布を使って計算する。

$P(X = x_i) = p_{i\cdot}$（周辺確率（Xの））

を計算すると前ページの表の通り。

それを使って $E[X] = \sum_i x_i p_{i\cdot}$ を計算する。

$$E[X] = \sum_{i=0}^{2} x_i p_{i\cdot}$$

$$= x_1 p_{1\cdot} + x_2 p_{2\cdot} + x_3 p_{3\cdot}$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 1$$

期待値の線型性

Th.

X, Y : r.v.
$a, b \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$

Proof.

$E[aX+bY]$

$$= \sum_i \sum_j (ax_i + by_j) p_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j (ax_i p_{ij} + by_j p_{ij})$$

二重シグマの線型性

$$= a \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + b \sum_i \sum_j y_j p_{ij}$$

$$= a \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + b \sum_j \sum_i y_j p_{ij}$$

$$= a \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + b \sum_j y_j \sum_i p_{ij}$$

$$= a \sum_i x_i p_{i\cdot} + b \sum_j y_j p_{\cdot j}$$

$$= a \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) + b \sum_j y_j \cdot \underline{P(Y = y_j)}$$

Yの周辺確率

$$= aE[X] + bE[Y].$$

//

シンプルなケースでcheck.

$(i, j = 1, 2)$

$$
\begin{aligned}
E[aX+bY] &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(ax_i + by_j)P_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(ax_i P_{ij} + by_j P_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\Big[(ax_i P_{i1} + by_1 P_{i1}) \qquad j=1 \\
&\qquad\qquad + (ax_i P_{i2} + by_2 P_{12})\Big] \qquad j=2 \\
&= \big[(ax_1 P_{11} + by_1 P_{11}) + (ax_1 P_{12} + by_2 P_{12})\big] \qquad i=1 \\
&\quad + \big[(ax_2 P_{21} + by_1 P_{21}) + (ax_2 P_{22} + by_2 P_{22})\big] \qquad i=2 \\
&= ax_1(P_{11} + P_{12}) + ax_2(P_{21} + P_{22}) \\
&\quad + by_1(P_{11} + P_{21}) + by_2(P_{12} + P_{22}) \\
&= ax_1 P_{1\cdot} + ax_2 P_{2\cdot} + by_1 P_{\cdot 1} + by_2 P_{\cdot 2} \\
&= a(x_1 P_{1\cdot} + x_2 P_{2\cdot}) + b(y_1 P_{\cdot 1} + y_2 P_{\cdot 2}) \\
&= aE[X] + bE[Y].
\end{aligned}
$$

//

分散，共分散

Def.

$g(X,Y)$ の分散

$\iff V[g(X,Y)] = E[(g(X,Y) - E[g(X,Y)])^2]$

一変数についての分散は、
周辺分布によって与えられる分散である。

- $V[X] \equiv E[(X - E[X])^2]$

$$= \sum_i \sum_j (x_i - E[X])^2 p_{ij}$$

$$= \sum_i (x_i - E[X])^2 \sum_j p_{ij}$$

$$= \sum_i (x_i - E[X])^2 p_{i\cdot}$$

Xの周辺確率関数

Xの周辺確率関数を用いて計算される
$(X - E[X])^2$ の期待値.

- $V[Y] \equiv E[(Y - E[Y])^2]$

$$= \sum_j (y_j - E[Y])^2 p_{\cdot j}$$

Thm (分散公式)

$$\boxed{V[X] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

一変数 r.v. のときと同様に成り立つ。

Def (共分散)

X, Y の<u>共分散</u> (covariance)

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Note

$$Cov[X, X] = V[X]$$

Th

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

共分散公式
と呼ぶことにする。

Proof

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &\equiv E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY - XE[Y] - E[X]Y + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]. \end{aligned}$$

期待値の
線型性

//

※ 共分散については、定義から即座に上の公式

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

が証明され、これを用いて、<u>4つの基本性質</u>などが
次々に証明される。

→ 次のレジュメ

Th

$$\boxed{\begin{aligned}&X, Y : \text{r.v.}\\ &a, b \in \mathbb{R}\\ &\Longrightarrow V[aX+bY] = a^2V[X] + 2ab\,\mathrm{Cov}[X,Y] + b^2V[Y]\end{aligned}}$$

Proof

$$\begin{aligned}
V[aX+bY] &= E\left[(aX+bY)^2\right] - \left(E[aX+bY]\right)^2\\
&= E\left[a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2\right]\\
&\qquad - \left(aE[X] + bE[Y]\right)^2\\
&= a^2E[X^2] + 2abE[XY] + b^2E[Y^2]\\
&\qquad - \left(a^2(E[X])^2 + 2abE[X]E[Y] + b^2(E[Y])^2\right)\\
&= a^2\left(E[X^2] - (E[X])^2\right)\\
&\qquad + 2ab\left(E[XY] - E[X]E[Y]\right)\\
&\qquad + b^2\left(E[Y^2] - (E[Y])^2\right)\\
&= a^2V[X] + 2ab\,\mathrm{Cov}[X,Y] + b^2V[Y].
\end{aligned}$$

//

Cor

$$\boxed{V[X-Y] = V[X] - 2\,\mathrm{Cov}[X,Y] + V[Y]}$$

同時確率変数に関する期待値・分散、2つの確率変数の共分散

問題1. 確率変数X, Yの同時確率関数p_{ij}が下表のように与えられているとする。(例えば、$p_{01} = 1/8$である。)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/8	1/8	0
1	1/8	2/8	1/8
2	0	1/8	1/8

関数$g(X, Y) = X^2 + Y$の値の期待値、すなわち$E[X^2 + Y]$を期待値の定義に従って求めなさい。

問題2. 二つの確率変数X, Yを考える。このとき、一変数についての期待値$E[X]$は、Xについての周辺確率分布によって得られる期待値と一致する。このことを、$X = x_i,\ Y = y_j$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$のケースで(シグマ記号をばらして)確認せよ。

問題3. 共分散の定義を述べ、

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

を証明せよ。また、$Cov[X,X] = V[X]$となることを確認せよ。

問題4. 次を証明せよ。

$$V[aX + bY] = a^2V[X] + 2abCov[X, Y] + b^2V[Y]$$

また、上式から

$$V[X - Y] = V[X] - 2Cov[X, Y] + V[Y]$$

が成り立つことを確認せよ。