論理的思考

入門の入門

１．全称記号と存在記号

全称記号 ∀

all もしくは any の頭文字である A をさかさまに書いたものであり,『**すべての（任意の）〜に対して**』という意味である.

『任意の』という日本語は,「人の**意**思に**任**せる」ということで,「好きに選んでもかまわない」という意味.

$\boxed{例}$ 関数 $f(x) = x^2$ を考える．このとき，

『全ての実数 $\boldsymbol{x}$ について $f(x) \geq 0$ である』

は真なる命題である．このことを，

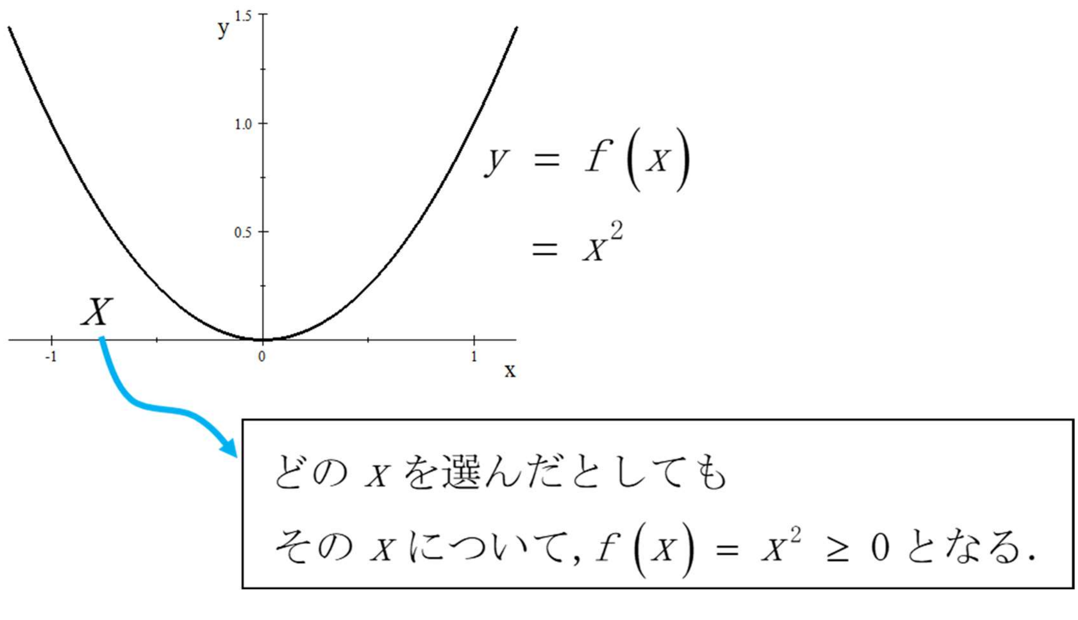
$$『\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0』 \quad \text{または}$$

$$『f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})』$$

などと書く．記号∀を省略して

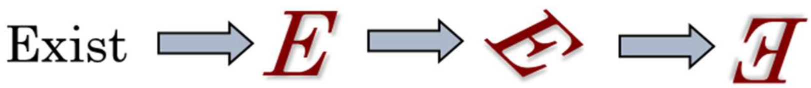
$$『f(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})』$$

と書くこともある．



存在記号∃

　記号∃は, 英語の exist の頭文字の E をさかさまに書いたものであり,『**存在する**』という意味である.



全称記号∀と，ある意味で対（ツイ）をなす.

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $f(x) = x^2 - 1$ を考える．このとき，

『ある実数 x が存在して $f(x) = 0$ である』

は真なる命題である．

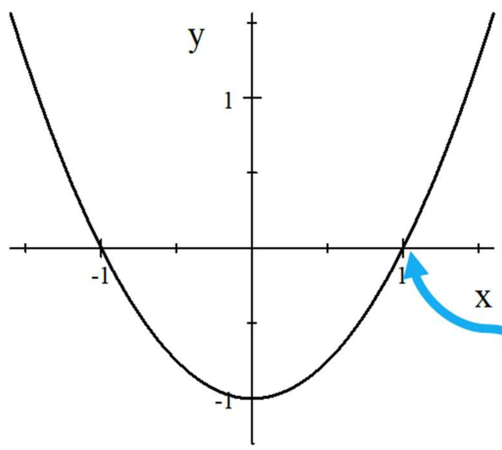
このことは，存在記号を用いると

$$『\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0』$$

と表現できる．ここでのコロン：は，英語の"such that"を意味するので，$『\exists x \in \mathbb{R}\ \ s.t.\ f(x) = 0』$ と書くこともある．

$f(x) = 0$ という条件を満たす実数がひとつでも存在すれば，上の命題は真となる．

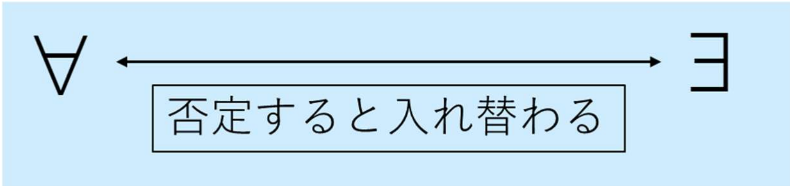
この場合，$f(x) = 0$ を満たす実数は，1 と－1 のふたつがある．いくらあってもかまわない．



$$y = f(x) = x^2 - 1$$

$f(x) = 0$ となる x が(ひとつでも)存在する．
この場合は，$x = 1$ と -1 のふたつがある．

2．記号∀∃と否定命題

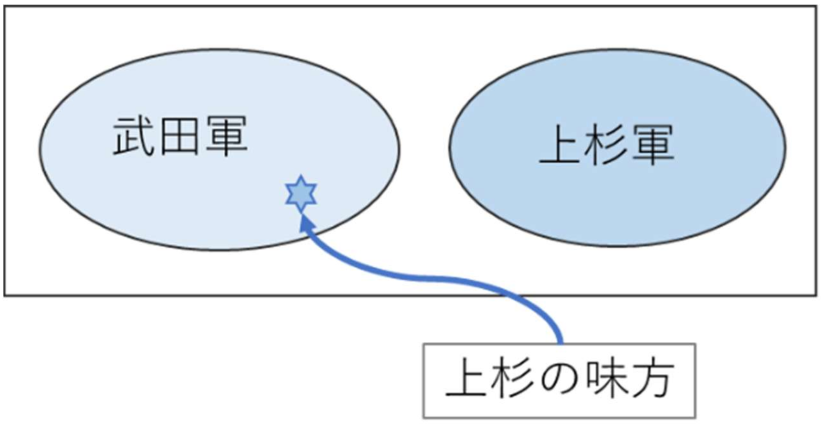


$\boxed{\text{例}}$ 次の二つの命題は、お互いに否定の関係にある。

（1）『武田軍の全ての兵士は，上杉の敵である』.

（2）『武田軍の中にある兵士が存在して，そのものは上杉の味方である』.

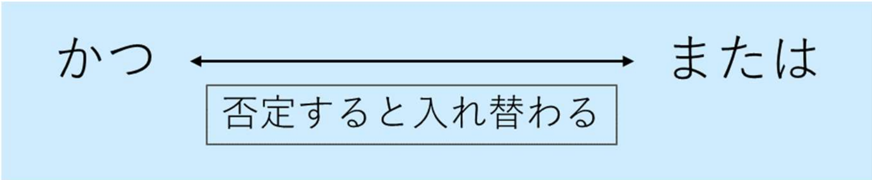
（1）を否定すると（2）になり、（2）をもう一度否定すると（1）に戻る．（**二重否定の法則**）



武田軍の中に
間者が存在する.

３．かつ(and)とまたは(or)

これらは，記号∀と∃の場合と同様に対をなす．



例 命題『花子さんは親切で頭がよい』を考える．

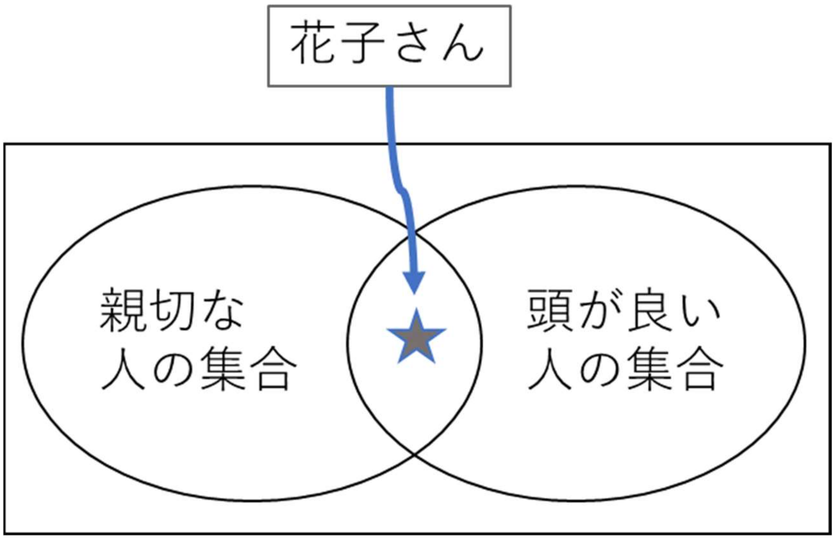
この命題は

（１）『花子さんは親切だ かつ（and）花子さんは頭がよい』

ということである．したがって，否定すると

（２）『花子さんは親切ではないか または（or）頭はよくない』

となる．そして，（２）を否定すると（１）に戻る．



４．条件命題とその逆

『A であるならば（⇒）B である』という型の命題を**条件命題**という．これは,

『A が満たされている状況では，常に B も満足される』

ということである.

A を**前提**, B を**結論**という. また, A は B を**含意する**(imply) という.

　条件命題『A であるならば (⇒) B である』を否定すると,『A が満たされているにもかかわらず, B が成り立たない場合がある』となる.

条件命題

『A であるならば（⇒）B である』

に対して

『B であるならば（⇒）A である』

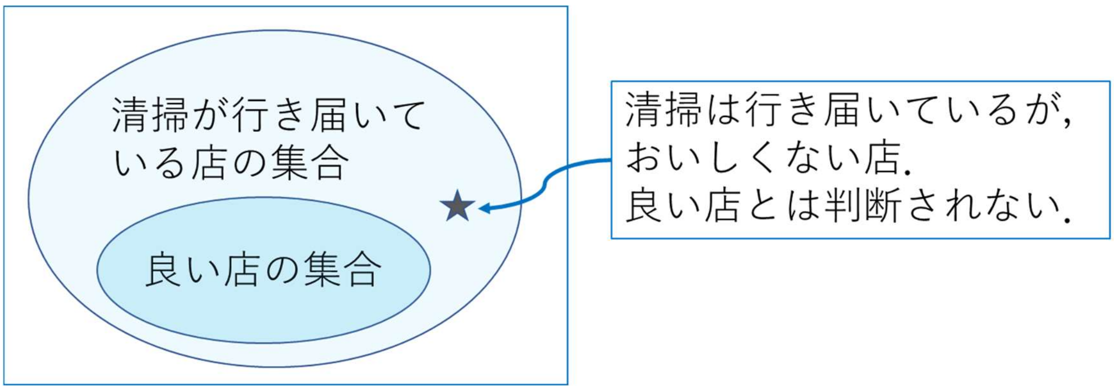
を元の命題の**逆命題**，または単に**逆**という.

元の命題とその逆の真偽(真か偽か)は必ずしも一致しない.

逆は必ずしも真ならず！（ただし，一致する場合もある.）

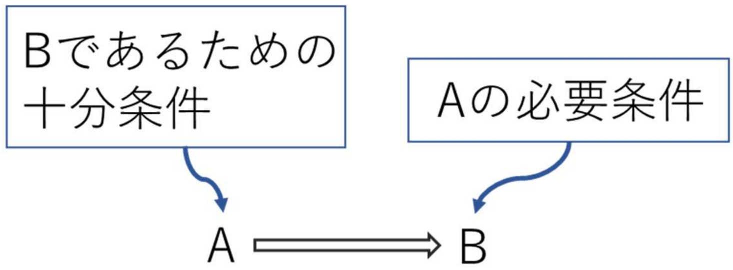
$\boxed{\text{例}}$ 条件命題『良い店であるならば, 清掃が行き届いている』の逆は

『清掃が行き届いている店は，よい店である』である．元の文が真だとしても，逆も真になるとは限らない.



５． 必要条件，十分条件

条件命題 A⇒B が真であるとき，A を B であるための**十分条件**，B は A の**必要条件**という．



$\boxed{例}$ 『良い店であるならば，清掃が行き届いている』という文章を考える．

　このとき,『清掃が行き届いている』のは,『良い店である』ための必要条件である. 良い店だという条件をクリアするためには, 清掃が行き届いているくらいの条件は当然**必要**とされる，というニュアンスである．

　『良い店である』というのは，『清掃が行き届いている』ための十分条件である．ある店が良い店だというのなら，清掃が行き届いているというくらいの条件は**十分**に保証される，という感覚だろう．

必要十分条件

A⇒B と同時に逆命題 B⇒A も成り立つとき，A は B の（B は A の）**必要十分条件**，または A と B は互いに**同値**（equivalent）であるといい，

$$A \Leftrightarrow B$$

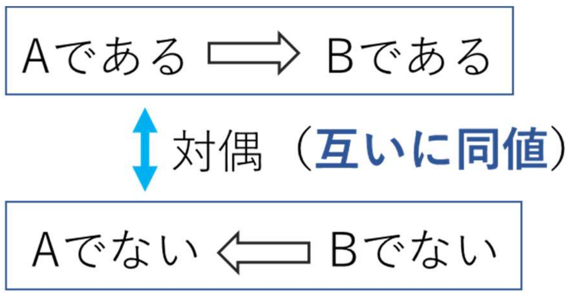
と書く．このとき，A と B の真偽は一致する．

６．対偶

条件命題『A である ならば（⇒）B である』に対して，

『B でない ならば（⇒）A でない』

を**対偶**という．ある命題とその対偶は，互いに同値であり真偽が一致する．



$\boxed{\text{例}}$『良い店であるならば，清掃が行き届いている』の対偶を考えると，

『清掃が行き届いていないならば，良い店ではない』となる．