Metric spaces:
the definition and examples

$\underline{\text{Def}}$

$X \neq \emptyset$

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ s.t.

(d1) $d(x,y) \geqq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d2) $d(x,y) = d(y,x)$

(d3) $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$

$\Rightarrow (X, d)$ <u>metric space</u> (MS)

※ (d1) $\overbrace{d(\underset{\in X}{x}, \underset{\in X}{y})}^{\in \mathbb{R}} = \underset{\in \mathbb{R}}{0} \iff \underset{\in X}{x} = \underset{\in X}{y}$

※ $$\boxed{\begin{aligned} & d(x, y) \\ & \quad \le d(x, z) + d(z, w) + d(w, y) \end{aligned}}$$

(∵)
$$\begin{aligned} & d(x, y) \\ & \le d(x, z) + \underline{d(z, y)} && (d3) \\ & \le d(x, z) + \underline{d(z, w) + d(w, y)} && (d3) \end{aligned}$$

※ $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in X$

ex

$$X = \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = |x-y| \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\mathbb{R}, d) \ \text{M.S}$$

Proof

(d1) $d(x,y) \geqq 0$;

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

OK.

(d2) $d(x,y) = d(y,x)$

It holds that

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |-(y-x)| \\ &= |-1| \cdot |y-x| \\ &= |y-x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

(A2)

(d3) $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$

The following holds:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= |x-y| \\
&= |x - \underset{\sim\sim\sim}{z + z} - y| \\
&\leqq |x-z| + |z-y| \quad \text{(A3)} \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}
$$

//

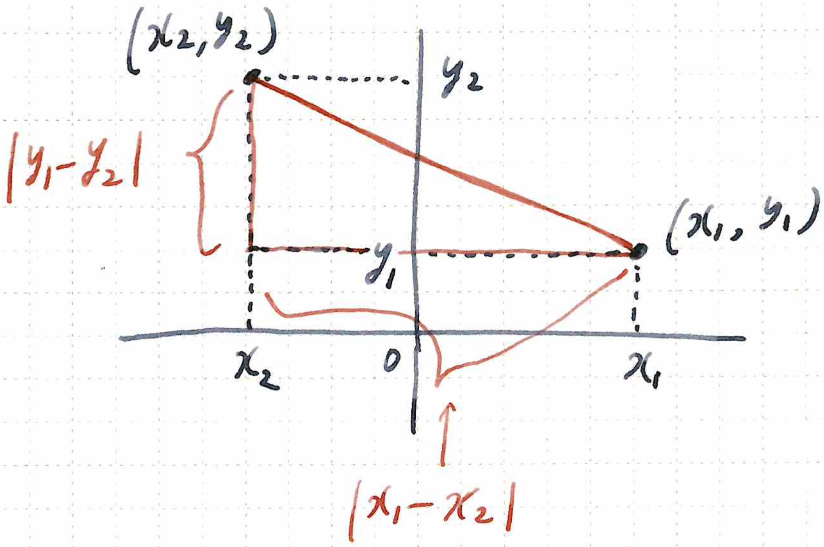
$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\text{(A1)}\ |x| \geqq 0;\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
&\text{(A2)}\ |\alpha x| = |\alpha||x| \\
&\text{(A3)}\ |x+y| \leqq |x| + |y|
\end{aligned}
}
$$

<u>ex</u>

$\mathbb{R}^2$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Then, $(\mathbb{R}^2, d)$ is a M.S.

※ ユークリッドの距離という。
特に断らなければ$\mathbb{R}^2$にはこの距離が入っていると考える。

ex

$\mathbb{R}^3$

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Then, $(\mathbb{R}^3, d)$ is a MS.

ex

$\mathbb{R}^N$

$\underset{x}{\overset{\parallel}{(x_1, \cdots, x_N)}}, \underset{y}{\overset{\parallel}{(y_1, \cdots, y_N)}} \in \mathbb{R}^N$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x_k - y_k)^2}$$

Then, $(\mathbb{R}^N, d)$ is a MS.

$X \neq \phi$

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ defined by

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, d)$: metric space

Proof

Let $x, y, z \in X$.

(d1) $d(x,y) \geqq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

OK.

(d2) $d(x,y) = d(y,x)$

OK.

(d3) $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$

(i) If $x = y$, then $d(x,y) = 0$.

Thus, $d(x,y) = 0 \leqq d(x,z) + d(z,y)$.

(ii) Assume that $x \neq y$.

Then, $d(x,y) = 1$.

As $x \neq y$, it holds that $z \neq x$ or $z \neq y$.

Therefore, $d(x,z) + d(z,y) = 1$ or 2.

$\therefore d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$.

//

※ discrete metric space 離散距離空間

どんな集合にも距離を入れることができる。

ex

$X = \{$グー, チョキ, パー$\}$

with the discrete metric

i.e. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$d($グー, グー$) = 0$

$d($グー, チョキ$) = 1$

$d($グー, パー$) = 1$

$\vdots$

ex

$X = \mathbb{R}$

$d_1(x, y) = |x - y|$

$$d_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases}$$

Then, (X, d_1), (X, d_2) MSs (metric spaces)

集合としては同じXを考えているが、
距離空間としては別物！

Def.

(X, d) MS

$A \subset X, \neq \phi$

$d|_{A \times A}(x, y) = d(x, y) \quad {}^\forall x, y \in X$

Then, $(A, d|_{A \times A})$ MS.

↑

<u>subspace</u> of (X, d)

部分空間

※ $d|_{A \times A}$

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ の定義域を

$A \times A \ (\subset X \times X)$ に制限した写像

"制限写像"という言い方をすることがある。

ex

$X = (0, 1] \ (\subset \mathbb{R})$

$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in X$

$d'(x, y)$: the discrete metric

Then,

- (X, d) : MS, a subspace of $\mathbb{R}$
- (X, d') : MS, which is not called a subspace of $\mathbb{R}$.

$$\boxed{|d(x,y)-d(x,z)| \leqq d(y,z)}$$

Proof.

We prove that

$$-d(y,z) \overset{①}{\leqq} d(x,y)-d(x,z) \overset{②}{\leqq} d(y,z).$$

①: It holds that

$$\begin{aligned} &d(x,z) \\ &\leqq d(x,y)+d(y,z). \quad (D3) \end{aligned}$$

Therefore, $-d(y,z) \leqq d(x,y)-d(x,z)$.

②: The following holds:

$$\begin{aligned} &d(x,y) \\ &\leqq d(x,z)+d(z,y) \quad (D3) \\ &= d(x,z)+d(y,z) \quad (D2) \end{aligned}$$

$\therefore d(x,y)-d(x,z) \leqq d(y,z)$.

//

(X, d) metric space

$\Rightarrow |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$

$\forall x, y, z \in X$

$\downarrow$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\Rightarrow \big| |x-y| - |x-z| \big| \leq |y-z|$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\downarrow x = 0$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$\Rightarrow \big| |y| - |z| \big| \leq |y-z| \quad \forall y, z \in \mathbb{R}$

Def.

(X, d) M.S
$x_0 \in X$
$r > 0$
$S_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$

<u>open sphere</u> with center x_0
and radius r

- $\forall x_0 \in X,\ r > 0,\ S_r(x_0) \neq \emptyset$

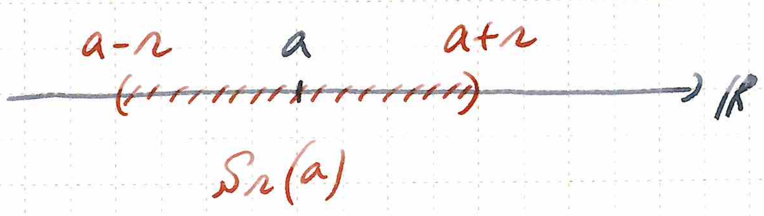
  $(\because)\ x_0 \in S_r(x_0).$

- $\forall x_0 \in X,\ r > 0,\ S_r(x_0) \subset X$

ex

$X = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

Then, $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$



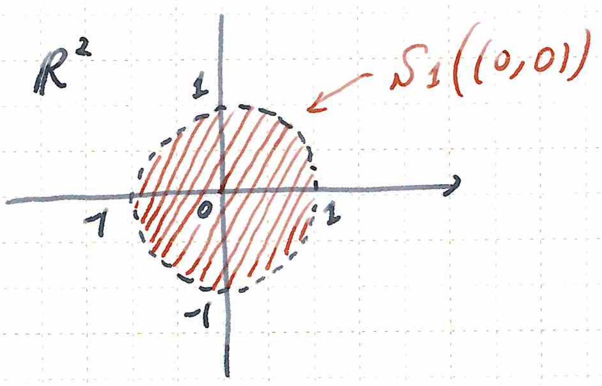
ex

$X = \mathbb{R}^2$

Then, $S_1((0,0))$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,0)) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$

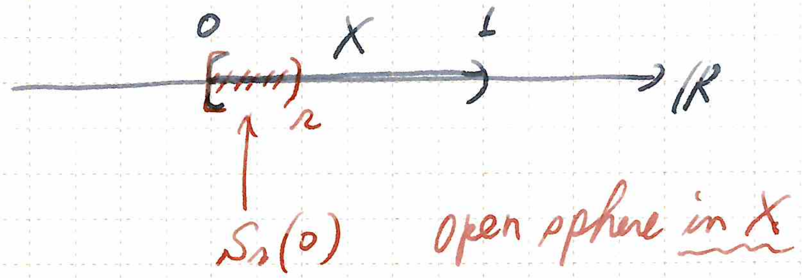


ex

$X = [0, 1) \; (\subset \mathbb{R})$

$S_r(0) = \{ x \in X \mid |x| < r \} \quad (r \in (0,1)).$

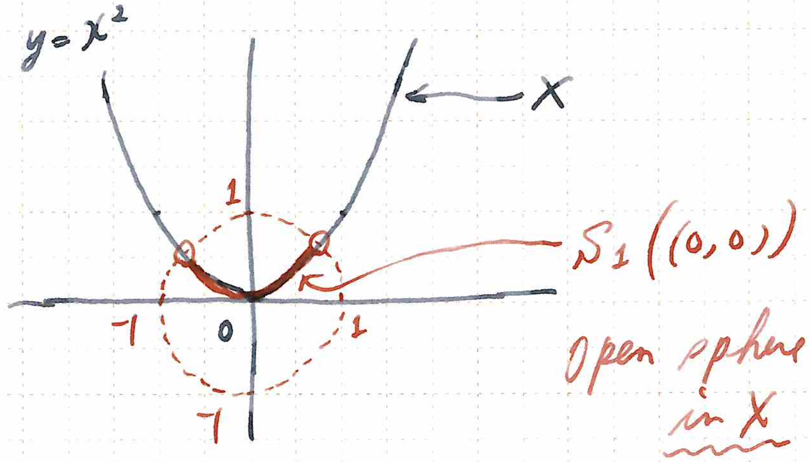
$\quad = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x < 1, \; |x| < r \}$



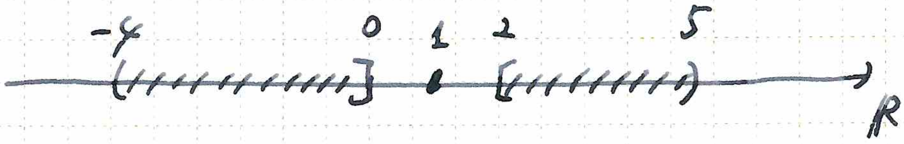
ex

$X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$

$S_1((0,0)) = \{ (x, y) \in X \mid x^2 + y^2 < 1 \}$



ex



$$A = (-4, 0] \cup \{0\} \cup [2, 5) \quad (\subset \mathbb{R})$$

subspace of $\mathbb{R}$

Then,

$$S_1(0) = (-1, 0],$$

$$S_2(0) = (-2, 0] \cup \{0\},$$

$$S_3(0) = (-3, 0] \cup \{0\} \cup [2, 3).$$

open spheres in A

ex

$X \neq \emptyset$

with the discrete metric

i.e. $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

$r > 0$

Then, $S_r(x) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$

$$= \begin{cases} X & \text{if } r > 1 \\ \{x\} & \text{if } 0 < r \leq 1 \end{cases}$$

X MS

$x \in X$

$0 < r_1 \leq r_2$

$\Rightarrow S_{r_1}(x) \subset S_{r_2}(x)$

<u>Proof</u>

Let $y \in S_{r_1}(x)$.

i.e. $d(x,y) < r_1$

We prove that <u>$y \in S_{r_2}(x)$.</u>

i.e. $d(x,y) < r_2$

OK. //

<u>Remark</u>

$0 < r_1 < r_2$

$\not\Rightarrow S_{r_1}(x) \subsetneqq S_{r_2}(x)$

Metric spaces: the definition and examples

1. 2つの実数x, yに対して，$d(x,y) = |x - y|$（差の絶対値）とすると，$(\mathbb{R}, d)$は距離空間になる．このことを証明せよ．その際に，絶対値の基本性質$(A1) - (A3)$をどこで用いたか明示せよ．

2. 距離空間(X,d)があるとする．また，$\alpha > 0$とする．このとき，$d'(x,y) = \alpha d(x,y)$と定めると(X, d')も距離空間になる．このことを示せ．

3. $\mathbb{R}^2$の2つの要素$(x,y), (u,v)$に対して，

$$d((x,y),(u,v)) = |x - u| + |y - v|$$

とする．

(1) このとき，$(\mathbb{R}^2, d)$は距離空間になる．このことを証明せよ．

※この距離空間はユークリッド空間とはいわない．

(2) 2点$(-1,2), (-2,-3)$間の距離をここでの距離で測るといくらか？ ユークリッドの距離ではどうか？

4. （離散距離空間）Xを空ではない集合とする．いま，$d : X \times X \to \mathbb{R}$を

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases}$$

と定義すると(X,d)は距離空間になる．このことを証明せよ．

5. 集合{グー，チョキ，パー}に離散距離関数以外の関数を入れ，距離空間になるようにせよ．

6. 距離空間(X,d)とその要素x, y, zについて，

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

を証明せよ．

7. 距離空間における開球についてゼミで学習する状況を考え，以下の(1)-(4)に答える形式で他のゼミ生に説明せよ．

(1) 次の手順で開球を定義せよ．

Step 1. 距離空間(X,d)（空ではない集合Xと距離関数$d : X \times X \to \mathbb{R}$の組）が所与として与えられる．

Step 2. 集合Xの要素xと正の数rが与えられる．

Step 3. 以上の準備の下で，xを中心とし半径rの開球$S_r(x)$は定義される（定義を書け）．

(2) 距離空間としての$\mathbb{R}$における$S_1(0)$と$S_2(0)$を図と数式で書け．

(3) 距離空間としての$\mathbb{R}^2$における開球$S_1((3,2))$の定義を(1)のStep 3を参考にして書いてみよ．また，平面$\mathbb{R}^2$に開球$S_1((3,2))$を図示せよ．

(4) 距離空間としての$\mathbb{R}^2$における開球$S_1((0,0))$, $S_1((1,0))$, $S_1((0,1))$を図と数式で書け．

※$\mathbb{R}^2$には特に断らなければユークリッドの距離が入っている．

8. 次の開球を図と数式で書け．

(1) $\mathbb{R}$の部分空間$[0,2)(\subset \mathbb{R})$における$S_{\frac{1}{2}}(0)$, $S_1(\frac{1}{2})$.

(2) $\mathbb{R}$の部分空間$[-3,2] \cup [3,7) \subset \mathbb{R}$における$S_3(1)$, $S_5(1)$.

(3) $\mathbb{R}^2$の部分空間$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$における$S_1(0,0)$.

(4) $\mathbb{R}^2$に離散距離を入れた場合の$S_{\frac{1}{2}}(0,0)$, $S_1(0,0)$, $S_2(0,0)$.

9. Xを距離空間，xをその要素とする．$0 < p \leq q$のとき$S_p(x) \subset S_q(x)$だが，$p < q$としたからといって$S_p(x) \subsetneq S_q(x)$まではいえない．このことを例などを用いて説明せよ．

解答

5. 例えば下表のように2点間の距離dを定めればよい．

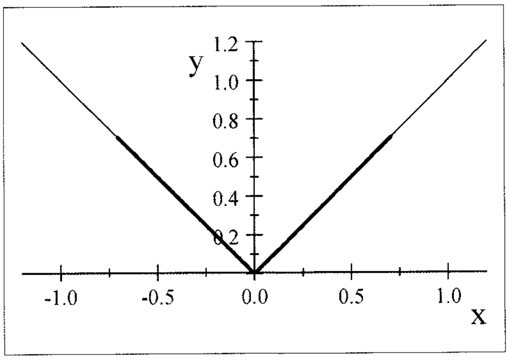
	グー	チョキ	パー
グー	0	2	5
チョキ	2	0	3
パー	5	3	0

この表では，例えばd(グー，チョキ) $= 2$となることが示されている．この関数が距離の3条件を満たすことについては，各自で確認せよ．

8. (1) $S_{\frac{1}{2}}(0) = [0, \frac{1}{2})$, $S_1(\frac{1}{2}) = [0, \frac{3}{2})$となる．図示については省略．

(2) $S_3(1) = (-2, 2] \cup [3, 4)$, $S_5(1) = (-3, 2] \cup [3, 6)$となる．図示については省略．

(3) 数式では$S_1(0,0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$と表される．$\frac{1}{\sqrt{2}}$と$-\frac{1}{\sqrt{2}}$は，それぞれ$x^2 + y^2 = 1$と$y = x$, $y = -x$を連立させることで導出される．図は以下の通り．ただし，点$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$と$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$は含まれていない．



(4) まず$S_{\frac{1}{2}}(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) < \frac{1}{2}\} = \{(0,0)\}$となる．
同様に $S_1(0,0) = \{(0,0)\}$である．
最後に$S_2(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(0,0)) < 2\} = \mathbb{R}^2$となる．