Boundedness

Def.

(X, d) MS

$A \subset X, \neq \emptyset$

$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$

<u>diameter</u> of A 直径

Remark

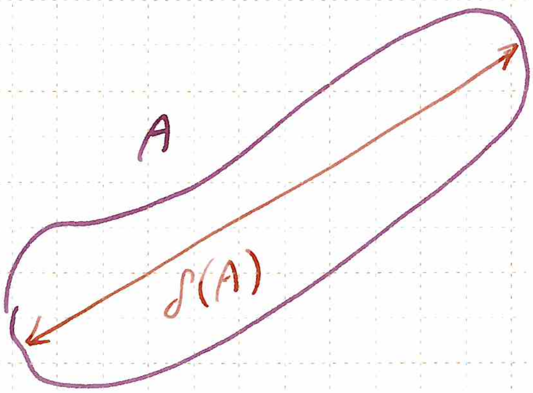
$A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \delta(A) = [0, \infty] \; (= [0, \infty) \cup \{\infty\})$

Def.

$A = \emptyset$

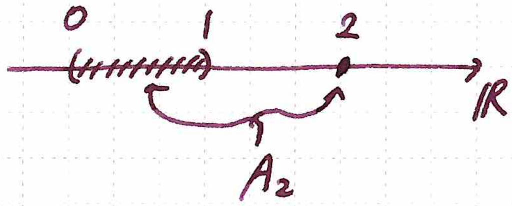
$\Rightarrow \delta(A) \equiv -\infty$



ex

$X = \mathbb{R}$

- $A_1 = (0,1)$ $\qquad \delta(A_1) = 1$
- $A_2 = (0,1) \cup \{2\}$ $\qquad \delta(A_2) = 2$



- $A_3 = [1, \infty)$ $\qquad \delta(A_3) = \infty$
- $A_4 = \mathbb{N}$ $\qquad \delta(A_4) = \infty$
- $A_5 = \{0\}$ $\qquad \delta(A_5) = 0$

ex

$X = \mathbb{R}$ with the discrete metric

- $\delta((0,1)) = 1$
- $\delta((0, \frac{1}{2})) = 1$
- $\delta(\mathbb{R}) = 1$
- $\delta(\{0\}) = 0$
- $\delta(\emptyset) = -\infty$

X MS

$x \in X$, $r > 0$

$S_r(x) = \{ z \in X \mid d(x,z) < r \}$

open sphere

$\Rightarrow \delta(S_r(x)) \leq 2r$

<u>Proof</u>

Let $y, z \in S_r(x)$.

Then, $d(x,y) < r$, $d(x,z) < r$.

It holds that

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < 2r.$$

Therefore,

$$\delta(S_r(x)) = \sup\{ d(y,z) \mid y, z \in S_r(x) \} \leq 2r.$$

//

<u>ex</u>

X : discrete MS

$x \in X$, $r > 0$

Then, $S_r(x) = \begin{cases} X & \text{if } r > 1 \\ \{x\} & \text{if } r \leq 1 \end{cases}$

Hence,

$$\delta(S_r(x)) = \begin{cases} 1 & \text{if } r > 1 \\ 0 & \text{if } r \leq 1 \end{cases}$$

For both cases,

$$\delta(S_r(x)) \leq 2r.$$

//

Def.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subset X \ \underline{\text{bounded}} \ (\text{bdd}) \\ \Longleftrightarrow \delta(A) < \infty \end{array}}$$

$\Longleftrightarrow {}^{\exists}M > 0 : {}^{\forall}x, y \in A,\ d(x, y) \leqq M$

Remarks

- ϕ is bdd.
- $A\ (\subset X)$ is not bdd.

  $\Longleftrightarrow \delta(A) = \infty$

  $\Longleftrightarrow \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} = \infty$

  $\Longleftrightarrow {}^{\forall}M > 0,\ {}^{\exists}x, y \in A : d(x, y) \geqq M.$

※ MS においては"上(下)に有界"という概念は定義されない。

(X, d) MS

$A \subset X$

$\Longrightarrow$ Equivalent

① A is not bdd.

i.e. $\forall M > 0, \exists x, y \in A : d(x, y) > M$ — ①'

② $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset A : d(x_n, y_n) \to \infty$

Proof

①$\Rightarrow$②

From ①', $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n, y_n \in A : d(x_n, y_n) > n$. $\to \infty$

$\therefore \exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset A : d(x_n, y_n) \to \infty$.

追い出しの原理

②$\Rightarrow$①

From ②,

$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geqq n_0 \Rightarrow d(x_n, y_n) > M$.

$\therefore \forall M > 0, \exists x_{n_0}, y_{n_0} \in A : d(x_{n_0}, y_{n_0}) > M$.

//

Def.

X metric space

$\{x_n\} \subset X$ <u>bdd</u>

$\Longleftrightarrow \exists x_0 \in X,\ M \geqq 0:$

$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, x_0) \leqq M$

Special Case

$X = \mathbb{R}$

$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ bdd

$\Longleftrightarrow \exists 0 \in \mathbb{R};\ M \geqq 0:\ \forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, 0) \leqq M$

$\Longleftrightarrow \exists M \geqq 0:\ \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqq M.$

X metric space

$\{x_n\} \subset X$

$\Rightarrow$ Equivalent

① $\{x_n\}$: bdd

i.e. $\exists x_0 \in X, M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x_0) \leq M.$

② $\forall x \in X, \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}. d(x_n, x) \leq M.$

Proof.

② $\Rightarrow$ ① OK

① $\Rightarrow$ ②

Let $x \in X$.

Let $x_0 \in X$ and $M \geq 0$ be those in ①.

It follows that

$$\begin{aligned} &d(x_n, x) \\ &\quad \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x) \\ &\quad \leq M + d(x_0, x) \equiv M'. \end{aligned}$$

$\therefore \forall x \in X, \exists M' \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x) \leq M'.$

//

X metric space

$\{x_n\} \subset X$

$\Rightarrow$ Equivalent

① $\{x_n\}$: bdd

i.e. $\forall x \in X, \exists M \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x) \leq M$

② $\sup_{m,n \in \mathbb{N}} d(x_m, x_n) < \infty$

i.e. $\exists M \geq 0 : \forall m, n \in \mathbb{N}, d(x_m, x_n) \leq M$

Proof

②$\Rightarrow$①

Let $x \in X$, and M be that in ②.

Choose $m \in \mathbb{N}$ arbitrarily, and define

$$M' \equiv M + d(x_m, x) \geq 0.$$

Let $n \in \mathbb{N}$.

Then,

$$\begin{aligned} & d(x_n, x) \\ & \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) \\ & \leq M + d(x_m, x) \equiv M'. \end{aligned}$$

Thus, $\forall x \in X, \exists M' \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x) \leq M'$. ⌟

① $\Rightarrow$ ②

Take $x \in X$ arbitrarily, and let $M \geqq 0$ be that in ①.

Define $M' \equiv 2M \geqq 0$.

Let $m, n \in \mathbb{N}$.

We obtain

$$
\begin{aligned}
& d(x_m, x_n) \\
& \quad \leqq d(x_m, x) + d(x, x_n) \\
& \quad \leqq 2M \equiv M'.
\end{aligned}
$$

$\therefore \exists M' \geqq 0 : \forall m, n \in \mathbb{N},\ d(x_m, x_n) \leqq M'.$

//

Boundedness

1. 次の$\mathbb{R}$の部分集合について，直径を答えよ．
(1) $A_1 = \{0\} \cup [1,2) \cup \{3\}$　(2) $A_2 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$　(3) $A_3 = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$

2. 距離空間(X,d)の半径$r(>0)$の開球の半径は$2r$以下である．このことを示せ．

3. 距離空間の部分集合が有界であるとはどういうことか？ 例を挙げながら説明せよ．

4. 離散距離空間においては，どんな部分集合も有界になる．なぜか？ また，離散距離空間において直径が0になる集合はどのようなものか？

5. Aを距離空間(X,d)の部分集合とする．このとき，Aが有界でないことと，$d(x_n, y_n) \to \infty$となるようなAの点列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$が存在することは同値である．このことを証明せよ．

6. 距離空間(X,d)において，点列$\{x_n\}$の有界性を

(1) ある$x_0 \in X$について，$M \geq 0$が存在し，
任意の$n \in \mathbb{N}$について$d(x_n, x_0)$となること

と定義すると，これは条件

(2) 任意の$x \in X$について，$M \geq 0$が存在し，
任意の$n \in \mathbb{N}$について$d(x_n, x)$となること

と同値である．さらに，

$$(3)\ \sup\{d(x_m, x_n) : m, n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

とも同値である．これらのことを示せ．