複数の確率変数の独立性

Def

X, Y : r.v.

independent

$\Updownarrow$

(i) X, Y : discrete

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

i.e. $P_{ij} = P_{i\cdot} P_{\cdot j}$

i.e 同時確率関数が周辺確率関数の積になる。

(ii) X, Y : continuous

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

i.e. 同時密度関数が周辺密度関数の積になる。

※ 独立な複数の r.v. については、周辺確率関数がわかれば、(それらの積として)同時確率関数を求めることができる。

例.

1コのサイコロと1枚のコインを同時に投げる。

$$X = \begin{cases} 1 & \text{if } ⚀ \\ 0 & \text{otherwise } (⚁ \sim ⚅) \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{if オモテ} \\ 0 & \text{if ウラ} \end{cases}$$

このとき、(X, Y)の同時確率関数は、

$X \backslash Y$	0	1	計	
0	$5/12$	$5/12$	$5/6$	$= P(X=0)$
1	$1/12$	$\boxed{1/12}$	$1/6$	$= P(X=1)$
計	$1/2$	$1/2$	1	
	$\shortparallel$ $P(Y=0)$	$\shortparallel$ $P(Y=1)$		

$P(X=1, Y=1)$

X, Y: independent

$(\because)$ $P(X=i, Y=j) = P(X=i)\,P(Y=j)$

$(i = 0, 1 ;\ j = 0, 1)$

が成り立つから。

//

例

（XとYは独立ではないが，X^2とY^2は独立）

同時確率分布

X \ Y	-1	0	1	計
-1	$1/8$	$1/8$	0	$2/8$
0	$1/8$	$2/8$	$1/8$	$4/8$
1	0	$1/8$	$1/8$	$2/8$
計	$2/8$	$4/8$	$2/8$	1

X, Y are not independent.

$(\because)$ $P(X=-1, Y=-1) = \dfrac{1}{8}$

$P(X=-1) = \dfrac{2}{8}$

$P(Y=-1) = \dfrac{2}{8}$

$$\therefore \underbrace{P(X=-1, Y=-1)}_{= 1/8} \neq \underbrace{P(X=-1)\cdot P(Y=-1)}_{= 1/16}$$

X^2, Y^2: independent

$X^2 \backslash Y^2$	0	1	計
0	$2/8$	$2/8$	$1/2$
1	$2/8$	$2/8$	$1/2$
計	$1/2$	$1/2$	1

check

$$P(X^2=0, Y^2=0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X^2=0) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y^2=0) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X^2=0, Y^2=0) = P(X^2=0) \cdot P(Y^2=0)$$

Similarly, we can easily verify that

$$P(X^2=0, Y^2=1) = P(X^2=0) \cdot P(Y^2=1),$$

$$P(X^2=1, Y^2=0) = P(X^2=1) \cdot P(Y^2=0),$$

$$P(X^2=1, Y^2=1) = P(X^2=1) \cdot P(Y^2=1).$$

//

例

X, Y の jointly p.d.f.

$$f(x,y) = \begin{cases} 3e^{-x-3y} & (x, y \geqq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\Rightarrow X, Y$: independent

i.e. $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Proof

- $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ のチェックは容易.
- $f_X(x)$ を求める。

(i) $x \geqq 0$

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_{y=0}^{\infty} 3e^{-x} \cdot e^{-3y}\,dy$$
$$= e^{-x} \int_{y=0}^{\infty} 3e^{-3y}\,dy$$
$$= e^{-x} (-1) \left[e^{-3y} \right]_0^{\infty}$$
$$= -e^{-x}(0-1) = e^{-x}$$

(ii) $x < 0$

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0$$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

・$f_Y(y)$を求める。

(i) $y \geqq 0$

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$
$$= \int_{x=0}^{\infty} 3e^{-x} e^{-3y}\,dx$$
$$= 3e^{-3y} \int_{x=0}^{\infty} e^{-x}\,dx$$
$$= 3e^{-3y}(-1)\left[e^{-x}\right]_0^{\infty}$$
$$= -3e^{-3y}(0-1)$$
$$= 3e^{-3y}$$

(ii) $y < 0$

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & (y \geqq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

Therefore,

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-x-3y} & (x, y \geqq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$= f(x,y).$$

This means that X and Y are independent.

//

Th

X, Y : r.v., continuous

$f_X(x) > 0$

$\Rightarrow$ Equivalent

① X, Y : independent

i.e. $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

② $f(y \mid X = x) = f_Y(y)$

Proof

$$② \Leftrightarrow \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

$$\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$$\Leftrightarrow ①.$$

//

※ $f(y \mid X = x) = f_Y(y)$

$X = x$ となるという
条件の下で……

x とは無関係

Th

X, Y : r.v., continuous

$f_X(x) > 0,\ f_Y(y) > 0$

$\Rightarrow$ Equivalent

① X, Y : independent

② $f(y \mid X = x) = f_Y(y)$

③ $f(x \mid Y = y) = f_X(x)$

Th

X, Y : r.v., discrete

$P(X = x) > 0,\ P(Y = y) > 0$

$\Rightarrow$ Equivalent

① X, Y : independent

i.e. $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$

② $P(Y = y_j \mid X = x_i) = P(Y = y_j)$

③ $P(X = x_i \mid Y = y_j) = P(X = x_i)$

X, Y: 離散型確率変数のケース

複数の確率変数の独立性

問題1. 二つの独立な確率変数X, Yがあり、$f_Y(y) > 0$とする。このとき、$f(x|Y = y) = f_X(x)$となる。このことを証明しなさい。

問題2. 二つの確率変数X, Yの同時確率関数が、以下のように与えられる。

$X \backslash Y$	0	1	2	計
0	0	2/10	1/10	
1	2/10		0	
2	1/10	0		
計		6/10		

このとき、表の空欄を埋め、X, Yは独立ではないことを示しなさい。

問題3. 二つの確率変数X, Yの同時確率密度関数を

$$f(x, y) = a^2 e^{-a(x+y)} \qquad (x, y \geq 0,\ a > 0)$$

とする。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$を確認しなさい。

(2) X, Yは独立か？

解答

問題2. 表は以下の通り埋められる。

$X\backslash Y$	0	1	2	計
0	0	2/10	1/10	**3/10**
1	2/10	**4/10**	0	**6/10**
2	1/10	0	**0**	**1/10**
計	**3/10**	6/10	**1/10**	**1**

また、

$$f(X=0|Y=1) = \frac{f(0,1)}{f_Y(1)} = \frac{2/10}{6/10} = \frac{1}{3},$$
$$f_X(0) = \frac{3}{10}$$

より、$f(X=0|Y=1) \neq f_X(0)$である。よって、確率変数X, Yは独立ではない。

問題3.

(1) 以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= a^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a(x+y)}dxdy \\ &= a^2\int_0^{\infty} e^{-ax}dx\int_0^{\infty} e^{-ay}dy \\ &= a^2\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\infty}\cdot\left[-\frac{1}{a}e^{-ay}\right]_0^{\infty} \\ &= [e^{-ax}]_0^{\infty}\cdot[e^{-ay}]_0^{\infty} \\ &= (0-1)\cdot(0-1) = 1\end{aligned}$$

(2) X, Yは独立かどうかの確認なので、$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$が成り立つかどうかをチェックすればよい。そのためにまず、$x,y \geq 0$として$f_X(x)$と$f_Y(y)$を求めると、

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\ &= a^2\int_0^{\infty} e^{-a(x+y)}dy \\ &= a^2e^{-ax}\int_0^{\infty} e^{-ay}dy \\ &= a^2e^{-ax}\left[-\frac{1}{a}e^{-ay}\right]_0^{\infty} \\ &= -ae^{-ax}[e^{-ay}]_0^{\infty} \\ &= ae^{-ax},\end{aligned}$$

同様に、

$$f_Y(y) = ae^{-ay}$$

となる。したがって、$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$が成り立つので、X, Yは独立である。