置換積分, アークタンジェント, Cauchy分布

置換積分法

Th

$f(x)$: $[a, b]$ 上で連続

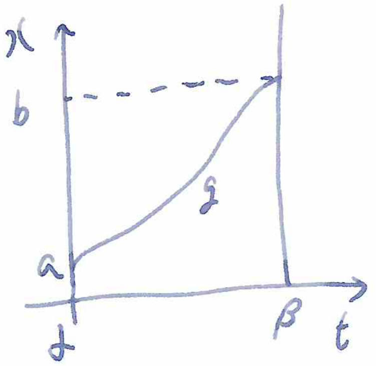
$x = g(t)$: 微分可能,

単調増加（又は単調減少）

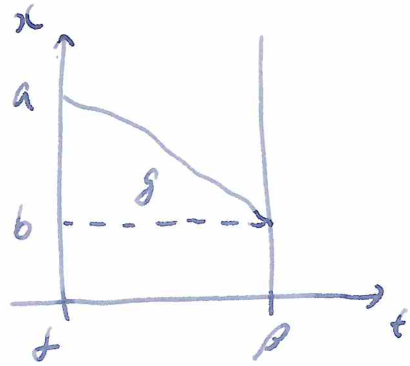
$g'(t)$: 連続

$$\Longrightarrow \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

ここで $\begin{cases} a = g(\alpha) \\ b = g(\beta) \end{cases}$ である。



g が単調増加のケース



g が単調減少のケース

※ x と t が 1 対 1 に対応しているところがポイント

$x = g(t)$ なので

$g'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ である。

よって定理の結論は、

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(x)\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

ということ。

例.

$$I = \int_0^1 (3x+2)^2 dx = ?$$

$f(x) = (3x+2)^2$ である。

ここで $t = 3x+2$ とおく。 $\longrightarrow$ $dt = 3dx$

$\therefore dx = \frac{1}{3}dt$

- $3x = t-2$

  $\therefore x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$

  $= g(t)$ とおくと

- g: 微分可能
  単調増加

- $g'(t) = \frac{1}{3}$ 連続

- $g(2) = 0$
  $g(5) = 1$

以上より

$$I = \int_{t=2}^{5} t^2 \underbrace{\frac{1}{3}dt}$$

あたかも
$dx = \frac{1}{3}dt$
を"代入"したかのように
扱える。

$$= \frac{1}{3}\int_{t=2}^{5} t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_2^5$$

$$= \frac{1}{9}(125-8)$$

$$= \frac{117}{9} = \underline{13}$$

例

$$I = \int_0^1 (-2x+1)^2 dx = ?$$

$t = -2x+1$ とおくと

$dt = -2dx \quad \therefore \ dx = -\frac{1}{2}dt$

$x=0 \iff t=1$

$x=1 \iff t=-1$

先の記号でいうと
gが単調減少のパターン

よって、

$$I = \int_{t=1}^{-1} t^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

積分範囲をひっくり返して
マイナスをかけた。

$$= -\int_{t=-1}^{1} t^2 \left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=-1}^{1} t^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}\left[t^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1^3 - (-1)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

例

$$I=\int_0^1 xe^{x^2}dx=?$$

$t=x^2$ とおくと

$dt=2x\,dx \quad \therefore dx=\dfrac{1}{2x}dt$

$x=0 \Leftrightarrow t=0$

$x=1 \Leftrightarrow t=1$

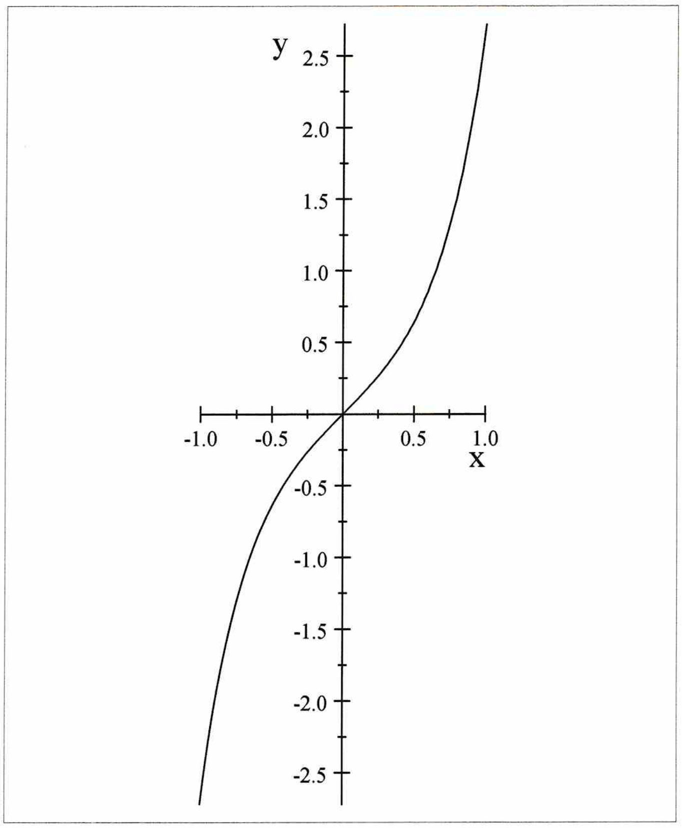
この積分範囲では、x と t は 1対1の関係。

よって、

$$\begin{aligned}
I&=\int_{x=0}^{1} xe^{x^2}dx\\
&=\int_{t=0}^{1} xe^{t}\cdot\frac{1}{2x}dt\\
&=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} e^{t}dt\\
&=\frac{1}{2}\left[e^{t}\right]_0^1\\
&=\underline{\frac{1}{2}(e-1)}
\end{aligned}$$

※ $\int_0^1 xe^{x}dx$ の計算では部分積分法を使った。

$y = xe^{x^2}$



例

$$I = \int_{-1}^{1} x e^{x^2} dx = ?$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{0} x e^{x^2} dx}_{\equiv I'} + \int_{0}^{1} x e^{x^2} dx$$

I' を求める.

$t = x^2$ とおくと

$dt = 2x\,dx$

$x = -1 \Longleftrightarrow t = 1$

$x = 0 \Longleftrightarrow t = 0$

$$\therefore I' = \int_{x=-1}^{0} x e^{x^2} dx$$

$$= \int_{t=1}^{0} x e^{t} \frac{1}{2x} dx$$

$$= -\int_{t=0}^{1} \frac{1}{2} e^{t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{t=0}^{1} e^{t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^{t} \right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2}(e-1)$$

先ほどの計算より $\int_{0}^{1} x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(e-1)$ なので

$$I = I' + \frac{1}{2}(e-1) = -\frac{1}{2}(e-1) + \frac{1}{2}(e-1)$$

$$= \underline{0}$$

例

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = ?$$

$t = x^2+1$ とおくと

$dt = 2x\,dx$

$x = 0 \iff t = 1$

$x \to \infty \iff t \to \infty$

よって

$$I = \int_{t=1}^{\infty} \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{2x}\,dt$$

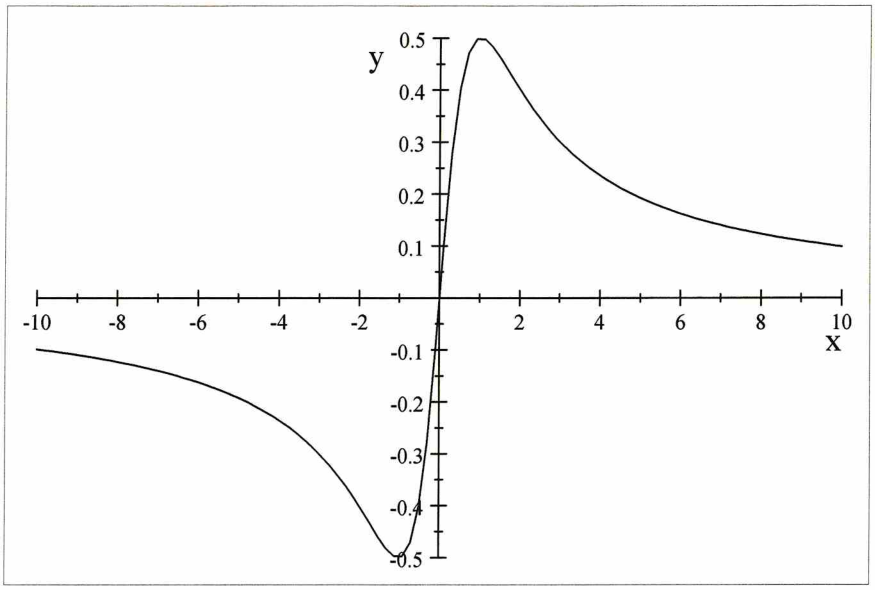
$$= \frac{1}{2}\int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log t\Big]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2}(\infty - 0)$$

$$= \infty$$

$y = \frac{x}{x^2+1}$



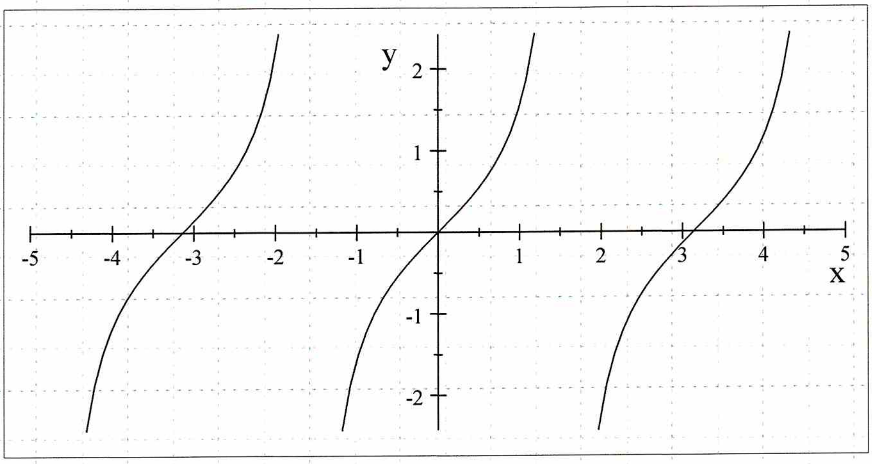
※ $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\infty$

※ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ は $\infty - \infty$ となり、

値が確定しない。

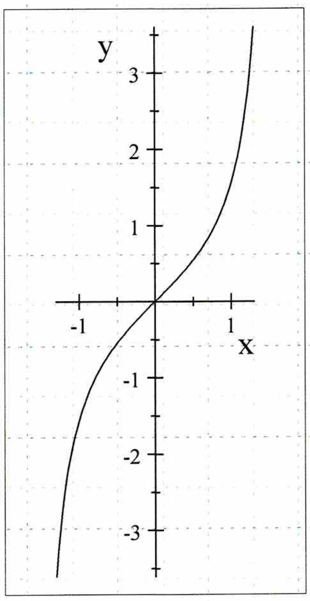
逆三角関数(特に $\tan x$ の逆関数)

$y = \tan x$



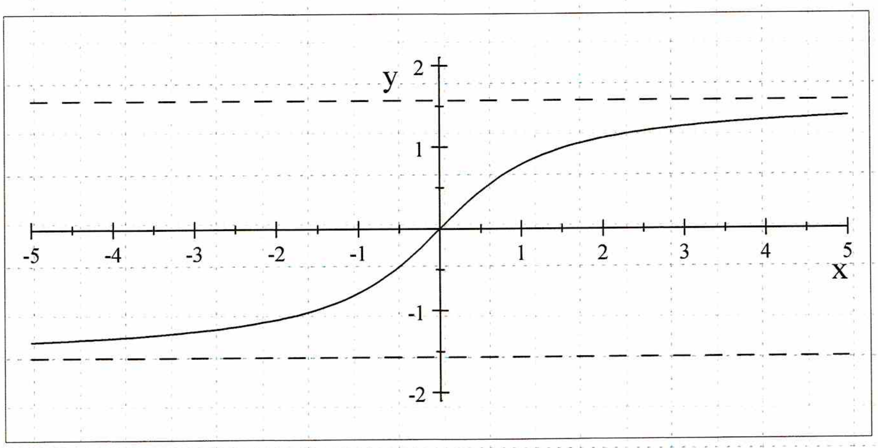
$y = \tan x \ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

範囲を限定すると、単調増加関数になる。



逆関数をとる。

$y = \arctan x$



$y=\tan x$ の $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ における

逆関数を

$y=\arctan x$ アーク・タンジェント

または

$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ $(x\in\mathbb{R})$

という。

その導関数は？

$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$

$\to y'=\frac{1}{x^2+1}$

逆に $\int\frac{1}{x^2+1}dx=\mathrm{Tan}^{-1}x+C$

参考

$(\mathrm{Sin}^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

$(\mathrm{Cos}^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

Cauchy分布

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-b)^2} \quad (a>0,\ b\in\mathbb{R})$$

$\downarrow$ $a=1,\ b=0$

特殊ケースをここでは考察する。

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1} \quad (x\in\mathbb{R})$$

p.d.f.

これはt分布の自由度1のケースである。

t分布のp.d.f.（自由度m）

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}} \left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}(m+1)}$$

where $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{y-1}\,du \quad (y>0)$

ガンマ関数

Notice!

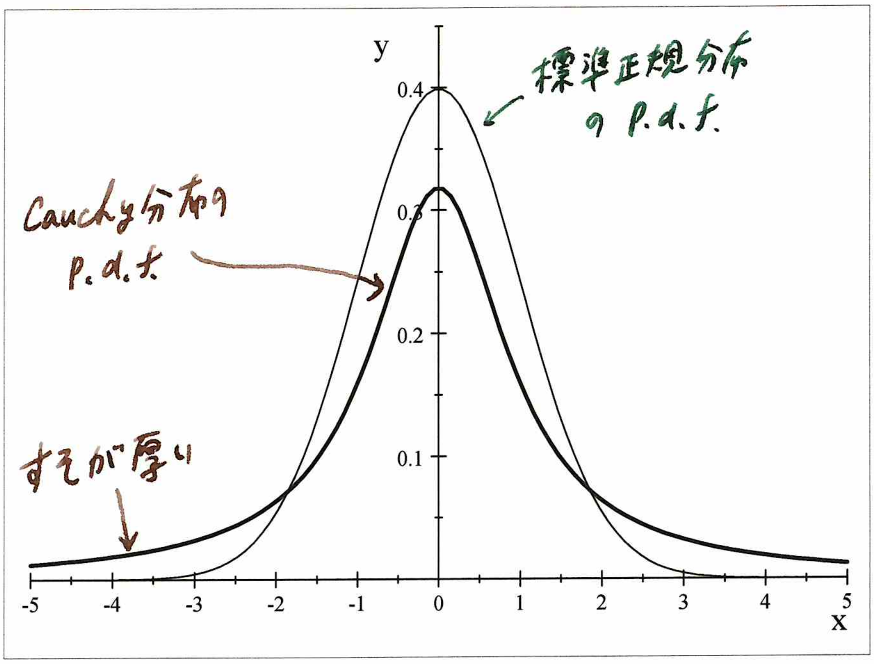
① $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$

② $\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n=1,2,3,\cdots)$

③ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (標準正規分布の確率密度関数)

$y = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}$ (Cauchy分布の確率密度関数)



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$$

check

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi$$

$$= 1.$$

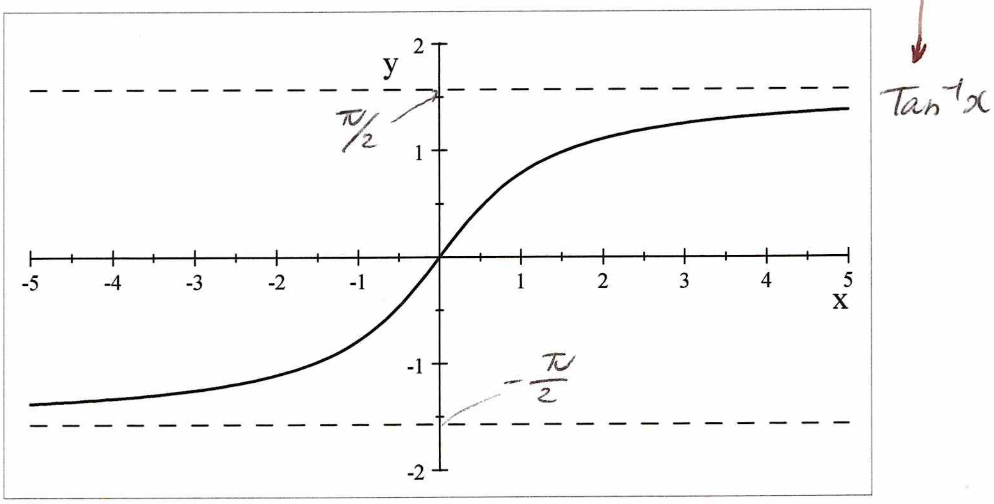
//

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$$

$$(\mathrm{Cos}^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$$

$$(\mathrm{Tan}^{-1}x)' = \frac{1}{x^2+1} \quad (x\in\mathbb{R})$$

$y=\tan x$ の逆関数



$\boxed{E[X] \text{ や } V[X] \text{ は存在しない。}}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$$

これらは存在しないので
それらを ＝(イコール)で
つないでいるこの書き方が
すでに不正確。

これは値が確定しない。

※ $E[X]$ が存在しないので、従って $V[X]$ も
存在しない。

※ 大数の法則や中心極限定理は、
$E[X]$ (や $V[X]$) の存在が前提になるので
この分布には適用できない。

Cauchy分布の分布関数

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Tan}^{-1}x + \frac{1}{2}}$$

check

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Tan}^{-1}t\right]_{-\infty}^{x}$$

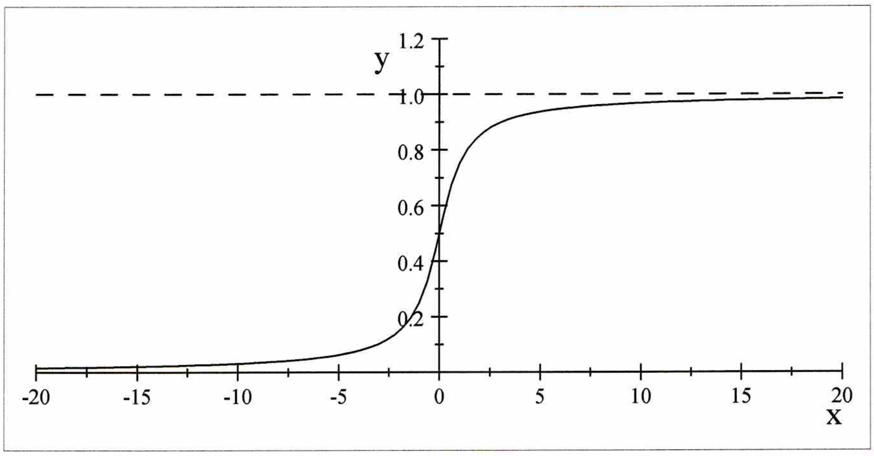
$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Tan}^{-1}x - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Tan}^{-1}x + \frac{1}{2}$$

//

$$\to \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{as } x \to \infty$$

$y = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$



基本的な積分

- $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
- $\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
- $\int 1\, dx = x + C$
- $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$ ← 特殊
- $\int x^{-2} dx = -x^{-1} + C$
- $\int x^{-3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$

 ....

- $\int \frac{1}{x+1} dx = \log|x+1| + C$

(cf. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ は
置換積分法を使う)

- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \mathrm{Tan}^{-1} x + C$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$

check

$$\left(\frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}\right)'$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+1}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{x^2+a^2}.$$

//

置換積分

問題1. 次の積分を置換積分法を用いて計算しなさい。

(1) $\int_0^2 (\frac{1}{2}x+1)^4 dx$　　(2) $\int_0^2 (-\frac{1}{2}x+2)^3 dx$

(3) $\int_0^2 xe^{x^2} dx$　　(4) $\int_{-1}^2 xe^{x^2} dx$

問題2. 置換積分法を用いて、$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} dx = \infty$となることを確認しなさい。

Cauchy分布

問題1. Cauchy分布の確率密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

である。以下の問いに答えなさい。

(1) 上の確率密度関数を$-\infty$から∞まで積分すると1になることを確認しなさい。

(2) 分布関数を求めなさい。

置換積分

解答.

問題1. (1) 62/5　(2) 15/2　(3) $\frac{1}{2}(e^4-1)$　(4) $\frac{1}{2}e(e^3-1)$