指数関数の微積分（その2）

ロピタルの定理，部分積分法，二重積分

ロピタルの定理

Th

f, g : differentiable

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

$g'(x) \neq 0$

$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Th

f, g : differentiable

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

$g'(x) \neq 0$

$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

※ a は 0 や ∞ でもかまわない。

例

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$$

$\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ なので

ロピタルの定理を適用

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$$

$$= 0$$

例.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$$

ロピタル

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}$$

ロピタル

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}$$

$$= 0.$$

例.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0.$$

ロピタルの定理を有限回 (n回)

適用すればよい。

134

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{ax}} \qquad (a>0)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a e^{ax}} = 0$$

134

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{ax}} \qquad (a>0)$$

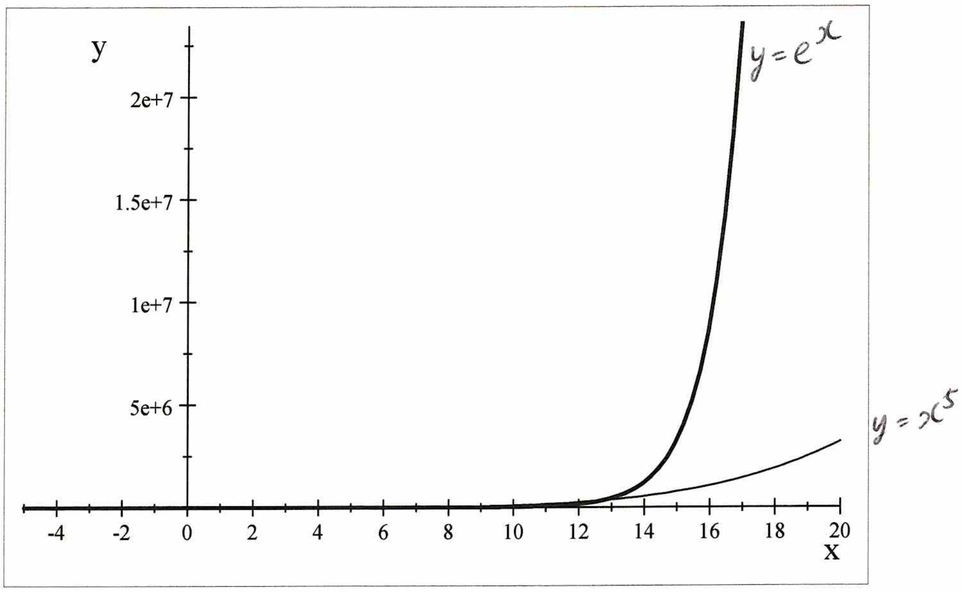
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{a e^{ax}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{a^2 e^{ax}}$$

$$= 0.$$

指数関数の微積分その2

$y = e^x$（太字）
$y = x^5$（細字）



部分積分法

積の微分公式の積分への応用である。

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Big\downarrow \text{両辺を積分する}$$

$$\int_a^b (f(x)g(x))' dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$\therefore \left[f(x)g(x)\right]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\therefore \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx}$$

例.

$$I = \int_1^2 \log x \, dx = ?$$

解

$$I = \int_1^2 1 \cdot \log x \, dx$$

$\log x$ を無理やり
$1 \cdot \log x$ とみなすと.
$\log x = (x)' \cdot \log x$

$$= \int_1^2 (x)' \log x \, dx$$

$\begin{cases} f = x \\ g = \log x \end{cases}$ とみなすと $\begin{cases} f' = 1 \\ g' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ となる。

従って, 部分積分法により

$$I = \int_1^2 f'(x) g(x) \, dx$$

$$= \Big[f(x) g(x) \Big]_1^2 - \int_1^2 f(x) g'(x) \, dx$$

$$= \Big[x \log x \Big]_1^2 - \int_1^2 1 \, dx$$

$$= \Big(2 \log 2 - \log 1 \Big) - \Big[x \Big]_1^2$$

$$= 2 \log 2 - (2 - 1)$$

$$= 2 \log 2 - 1.$$

例

$$I = \int_0^1 x e^x dx = ?$$

解

$\begin{cases} f = x \\ g' = e^x \end{cases}$ とみなすと。$\begin{cases} f' = 1 \\ g = e^x \end{cases}$ である。

部分積分法により

$$I = \int_0^1 f(x) g'(x) dx$$

$$= \left[f(x) g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x) g(x) dx$$

$$= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$I = \int_0^1 x e^x dx$ の x が外れ、$\int_0^1 e^x dx$ になった！

$$= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= (e - 0) - (e^1 - e^0)$$

$$= e - e + e^0$$

$$= 1.$$

例

$$I = \int_0^1 (ax+b)e^x dx = ? \quad (a, b \in \mathbb{R} : \text{const.})$$

解.

$\begin{cases} f = ax+b \\ g' = e^x \end{cases}$ とすると $\begin{cases} f' = a \\ g = e^x \end{cases}$ である。

部分積分法により

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \\
&= \Big[f(x)g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx \\
&= \Big[(ax+b)e^x\Big]_0^1 - a\int_0^1 e^x\,dx \\
&= (a+b)e - be^0 - a\Big[e^x\Big]_0^1 \\
&= ae + be - b - a(e-1) \\
&= \underline{be - b + a}
\end{aligned}
$$

//

例

$$I = \int_0^\infty x \cdot a e^{-ax} dx = ? \qquad (a>0)$$

解

$$\begin{cases} f = x \\ g' = a e^{-ax} \end{cases}$$ とすると $$\begin{cases} f' = 1 \\ g = -e^{-ax} \end{cases}$$ である.

部分積分法より

$$I = \int_0^\infty f(x) g'(x) dx$$

$$= \left[f(x) g(x) \right]_0^\infty - \int_0^\infty f'(x) g(x) dx$$

$$= \left[-x e^{-ax} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax} dx$$

$$= \left[-\frac{x}{e^{ax}} \right]_0^\infty - \left[\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^\infty$$

ロピタル

$$= \left(-0 + \frac{0}{1} \right) - \frac{1}{a} \left[e^{-ax} \right]_0^\infty$$

$a>0$

$$= 0 - \frac{1}{a} \left(0 - e^0 \right)$$

$$= \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I = a \int_0^\infty x e^{-ax} dx = \dfrac{1}{a} \text{ より} \\[2ex] \int_0^\infty x e^{-ax} dx = \dfrac{1}{a^2} \text{ となる.} \end{array}}$$

例

$$I' \equiv \int_0^\infty x^2 \cdot a e^{-ax} dx = ? \qquad (a>0)$$

解

$\begin{cases} f = x^2 \\ g' = a e^{-ax} \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} f' = 2x \\ g = -e^{-ax} \end{cases}$ となる。

部分積分法を用いて

$$I' = \int_0^\infty f(x) g'(x) dx$$

$$= \Big[f(x) g(x) \Big]_0^\infty - \int_0^\infty f'(x) g(x) dx$$

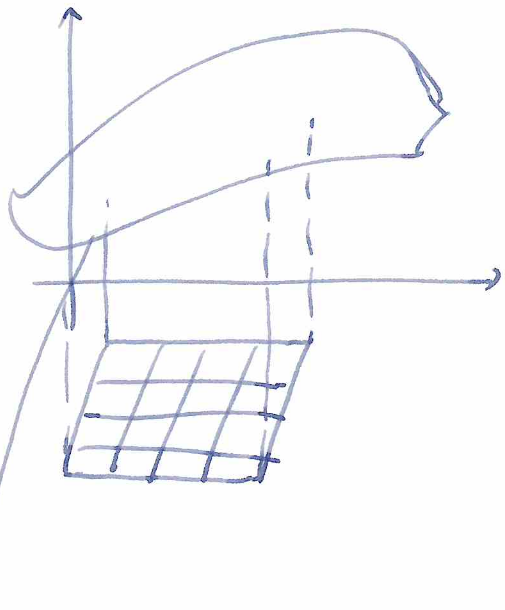
$$= \Big[x^2 \cdot (-1) e^{-ax} \Big]_0^\infty + 2 \underbrace{\int_0^\infty x \cdot e^{-ax} dx}_{(\text{前ページ})}$$

$$= \left[- \frac{x^2}{e^{+ax}} \right]_0^\infty + 2 \frac{1}{a^2}$$

$$= \left(-0 + \frac{0}{e^0} \right) + \frac{2}{a^2}$$

$$= \frac{2}{a^2}$$

二重積分



曲面がつくる体積をもとめる試み

Th (累次積分)

長方形D $a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$

$f(x,y)$: 連続 (D上で)

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

※ $$\overbrace{\int_{y=c}^{d} \left[\underbrace{\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx}_{} \right] dy}^{}$$

yを固定し $f(x,y)$ を x の関数とみなして

それを a から b まで積分する.

それは y の関数になる.

それを $y=c$ から d まで積分すればよい。

例.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2\}$$

$$I=\iint_D (x+y)\,dx\,dy = ?$$

$$I=\int_{x=0}^{1}\Big[\underbrace{\int_{y=0}^{2}(x+y)\,dy}\Big]dx$$

xは定数扱い。
yで積分する。

$$=\int_{x=0}^{1}\Big[xy+\frac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{2}dx$$

$$=\int_{x=0}^{1}\Big[\underline{2x+2-\left(x\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0^2\right)}\Big]dx$$

y=0, 2を代入したので
yは消えた.

$$=\int_{x=0}^{1}(2x+2)\,dx$$

xのみの関数になった。
xで積分する。

$$=\Big[x^2+2x\Big]_0^1$$

$$=3$$

//

134

$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$

$I = \iint_D \left(x + \frac{3}{2} y^2\right) dx\, dy = ?$

$I = \int_{y=0}^{1} \left[\int_{x=0}^{1} \left(x + \frac{3}{2} y^2\right) dx \right] dy$

$= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x y^2 \right]_{x=0}^{1} dy$

$= \int_{y=0}^{1} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} y^2 \right) dy$

$= \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y^3 \right]_{y=0}^{1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1.$

//

Th

長方形 $D=\{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$

$f(x,y)$ D上連続

$f(x,y)=g(x)h(y)$

$\Longrightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$

例

$D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$

$I=\iint_D xy\,dx\,dy = ?$

$$I=\int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{1} xy\,dy\right]dx$$

$$=\int_{x=0}^{1} x\,dx \cdot \int_{y=0}^{1} y\,dy$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

134

$D = \{(x, y) \mid x, y \geqq 0\}$

$f(x, y) = a e^{-x-ay}$ $\quad$ $(a : \text{const.})$ $\quad a > 0$

$I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \ ?$

$$I = \int_{x=0}^{\infty} \left[\int_{y=0}^{\infty} a e^{-x-ay} dy \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \left[\int_{y=0}^{\infty} a \cdot e^{-x} \cdot e^{-ay} dy \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} dx \cdot \int_{y=0}^{\infty} a e^{-ay} dy$$

$$= \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} \cdot \left[-e^{-ay} \right]_0^{\infty}$$

$a > 0$

$$= (-0 + 1) \cdot (-0 + 1)$$

$$= 1.$$

//

例

$$D=\{(x,y)\mid x,y\geqq 0\}$$

$$I=\iint_D\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)e^{-x-y}\,dx\,dy=\ ?$$

解

$$I=\int_{x=0}^{\infty}\left[\int_{y=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)e^{-x}e^{-y}\,dy\right]dx$$

$$=\int_{x=0}^{\infty}e^{-x}\underbrace{\left[\int_{y=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)e^{-y}\,dy\right]}_{\equiv I'}dx$$

$$\begin{cases} f=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}y & (\alpha：定数) \\ g'=e^{-y} \end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases} f'=\dfrac{1}{4} \\ g=-e^{-y} \end{cases}$$ である。

部分積分法により

$$I'=\int_{y=0}^{\infty}f(y)g'(y)\,dy$$

$$=\Big[f(y)g(y)\Big]_{y=0}^{\infty}-\int_{y=0}^{\infty}f'(y)g(y)\,dy$$

$$=\left[-\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)e^{-y}\right]_{y=0}^{\infty}+\frac{1}{4}\int_{y=0}^{\infty}e^{-y}\,dy$$

$$=-0+\frac{3}{4}x\cdot e^{-0}+\frac{1}{4}\Big[-e^{-y}\Big]_0^{\infty}$$

$$=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\left(-0+e^{0}\right)=\underline{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}$$

よって

$$I = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x}\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$\left(\begin{array}{l} f = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \\ g' = e^{-x} \end{array}\right. \quad \text{とすると}$$

$$\left(\begin{array}{l} f' = \frac{3}{4} \\ g = -e^{-x} \end{array}\right. \quad \text{である.}$$

$$\therefore I = \left[-\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)e^{-x}\right]_{x=0}^{\infty} + \frac{3}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx$$

$$= -0 + \frac{1}{4}e^{-0} + \frac{3}{4}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-0+1\right)$$

$$= 1$$

//

指数関数の微積分その2

問題1. (ロピタルの定理) 次の極限を求めなさい。

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \quad (2)\ \lim_{x\to\infty}xe^{-x} \quad (3)\ \lim_{x\to\infty}x^{-2}e^x \quad (4)\ \lim_{x\to\infty}x^3e^{-ax}$$ （ただし、$a > 0$）

問題2. (部分積分法) 次の定積分の値を求めなさい。

$$(1)\ \int_1^e \log x dx \qquad (2)\ \int_{-\infty}^0 xe^x dx$$

問題3. (部分積分法) $a > 0$を定数として、次の定積分の値を求めなさい。

$$(1)\ I = \int_0^\infty x \cdot ae^{-ax}dx \qquad (2)\ I' = \int_0^\infty x^2 \cdot ae^{-ax}dx$$

問題4. (二重積分)

(1) $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$上で関数$f(x,y) = x + \frac{3}{2}y^2$を二重積分しなさい。

(2) $D = \{(x,y) : x,y \geq 0\}$上で関数$f(x,y) = 2e^{-2x-y}$を二重積分しなさい。

(3) $D = \{(x,y) : x,y \geq 0\}$上で関数$f(x,y) = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)e^{-x-y}$を二重積分しなさい。