ネピア数 e について

四則演算と極限

$\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ 収束数列

$\Rightarrow$ ① $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

② $\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$

特に $\lim \alpha a_n = \alpha \cdot \lim a_n$

③ $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$

ただし, $b_n \neq 0$, $\lim b_n \neq 0$

$\downarrow$

Cor

$\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ 収束数列, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim (\alpha a_n + \beta b_n)$

$= \alpha \cdot \lim a_n + \beta \cdot \lim b_n$

Proof

It holds that

$$
\begin{aligned}
&\lim (\alpha a_n + \beta \lim b_n) \\
&= \lim \alpha a_n + \lim \beta b_n \quad ① \\
&= \alpha \cdot \lim a_n + \beta \cdot \lim b_n \quad ②
\end{aligned}
$$

//

- 注意

$\{a_n\}, \{b_n\}$：収束数列

という仮定は必要である。

<u>ex</u>

$\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, \cdots\}$

$\{b_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$

とすると，$\lim a_n$, $\lim b_n$ は存在しない。

一方，$a_n + b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

なので

$\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \cdots\}$ であり，

$\lim (a_n + b_n) = 0$ である。

よって，

$$\underbrace{\lim (a_n + b_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \lim a_n + \lim b_n$$

存在しない。

は成り立たない。

関数の連続性

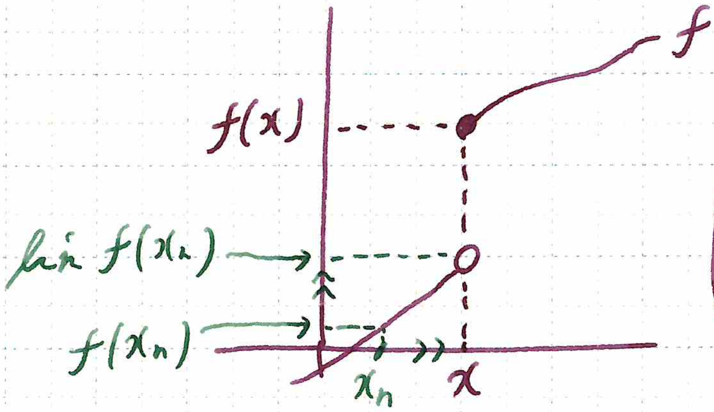
- $y=f(x)$: continuous at x

$\iff x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

グラフが点 x においてつながっていること.

↓

不連続な関数だと…



$x_n \to x$ だが

$f(x_n) \not\to f(x)$

- $y=f(x)$: continuous

$\iff {}^\forall x$: f の定義域の任意の点,

f: continuous at x.

$y = f(x)$: continuous at x

$$\Longleftrightarrow \boxed{x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)}$$

$\lim x_n = x$ 　　　 $\lim f(x_n) = f(x)$

なので

$$\boxed{\lim f(x_n) = f(\lim x_n)}$$ ということ.

つまり, map してから極限をとる (左辺) のと,

極限をとってから map する (右辺) のが等しくなる。

$y = x^2$,

$y = x^3$,

$\vdots$

$y = x^a$, $(a \in \mathbb{R})$

$y = \log x$,

$y = e^x$

などは連続関数である.

eの性質

$$\boxed{(1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Proof.

省略。

$\left(\begin{array}{l} n=1,2,3,\cdots \\ n\to\infty \text{ でなくてもよい。}\end{array}\right)$

$$\boxed{(2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Proof.

Let $y=-x$.

Then, $x\to-\infty \iff y\to\infty$.

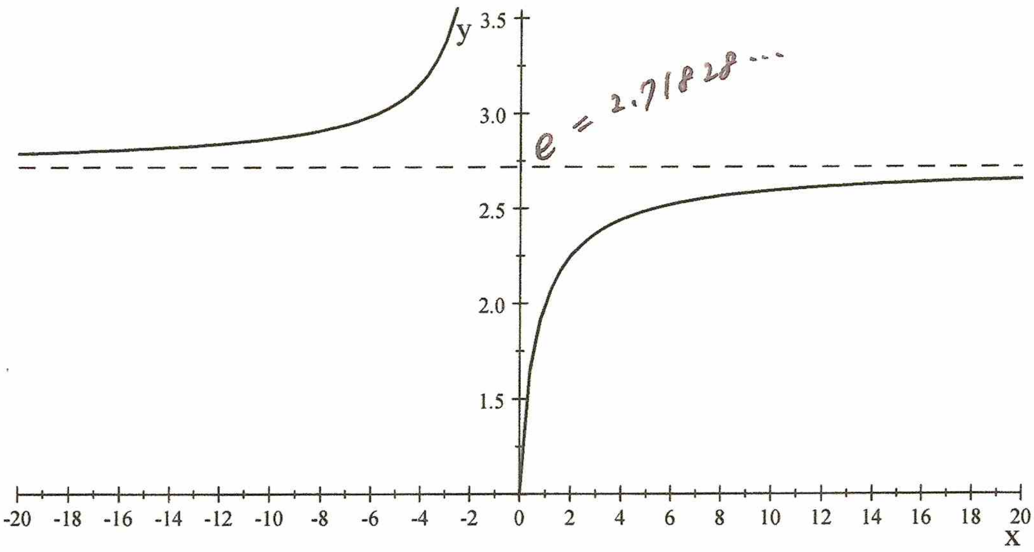
It holds that

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\
&= \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} \\
&= \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \\
&= \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \\
&= \underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\to e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}_{\to 1} \quad \text{as } y\to\infty
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.$$

//

$y = (1 + \frac{1}{x})^x$



y
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
-20
-18
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
x
e = 2.71828...

(3) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+a} = e$

where $a \in \mathbb{R}$ is a constant.

<u>Proof</u>

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+a}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a}$$

$$= e \cdot 1^{a}$$

$$= e.$$

//

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^a$

where $a\in\mathbb{R}$ is a constant.

Proof

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{a}$$

$y=x^a$ の連続性

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{a}$$

$$=e^a.$$

//

※ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^a$

$$\boxed{(5)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a:\text{const.})}$$

Proof

(I) $a=0$ OK.

(II) $a \neq 0$

$a \neq 0$

We have that

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}.$$

Note that

if $a>0$, $x\to\infty \iff \frac{x}{a}\to\infty$;

if $a<0$, $x\to\infty \iff \frac{x}{a}\to-\infty$.

Thus, we obtain that

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a$$

$$= e^a.$$

//

※ $a=-1$ とおくと

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$$

※ a を $-a$ で置きかえると

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x = e^{-a}$$

$$\boxed{\begin{gathered} {}_nC_1\left(\frac{\lambda}{n}\right)^1\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \quad (\lambda : \text{const.}) \\ \longrightarrow \lambda e^{-\lambda} \end{gathered}}$$

例.

(∵)

$$\begin{aligned}
&{}_nC_1\left(\frac{\lambda}{n}\right)^1\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!\,1!}\,\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \\
&= \lambda\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-1}}_{\to 1^{-1}=1} \\
&\longrightarrow \lambda e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

//

平均値の定理

(the mean value theorem)

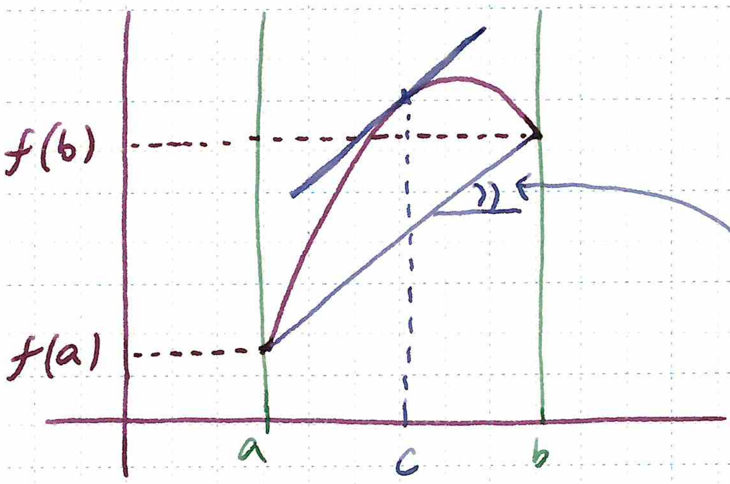
Th.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuous

f : differentiable on (a, b)

$\Longrightarrow {}^\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

平均値の定理
$\longrightarrow$ テーラー展開　(精密化)
$\longrightarrow$ マクローリン展開 (特殊ケース)

Let $x \in (a, b]$.
From the mean value theorem,

$$\exists c \in (a, x) : f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\therefore f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$$

$\downarrow$ 精密化

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(a) \cdot (x-a)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(a)(x-a)^4 + \cdots}$$

f の $x = a$ のまわりでの テイラー展開.

$\downarrow$ $a = 0$

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0) x^4 + \cdots}$$

f の マクローリン展開
($x=0$ のまわりでの テイラー展開)

fのマクローリン展開

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots}$$

指数関数 $y=e^x$ のマクローリン展開

$$\boxed{\begin{aligned} &y = e^x \\ &\rightarrow y' = e^x \end{aligned}}$$

(微分しても変わらない。)

より

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & \qquad f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= e^x & \qquad f''(0) &= 1 \\ &\cdots & &\cdots \end{aligned}$$

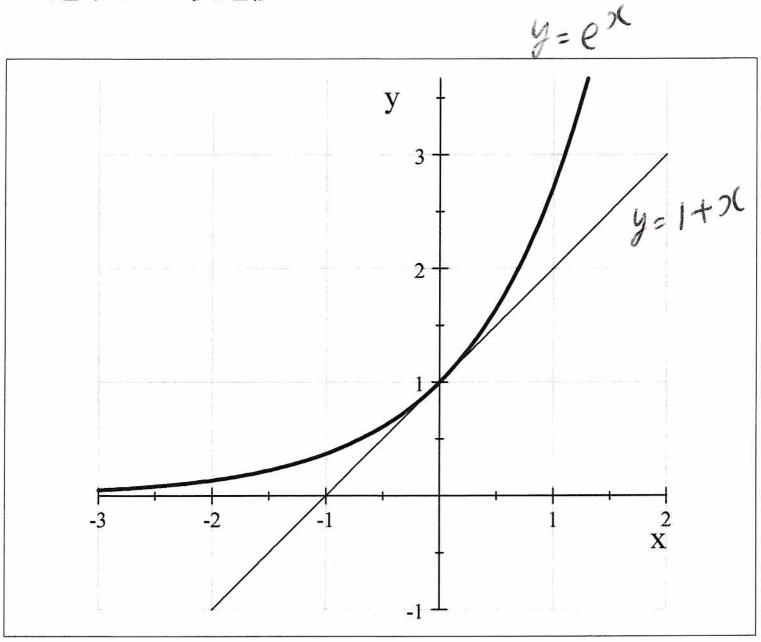
よって

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}}$$

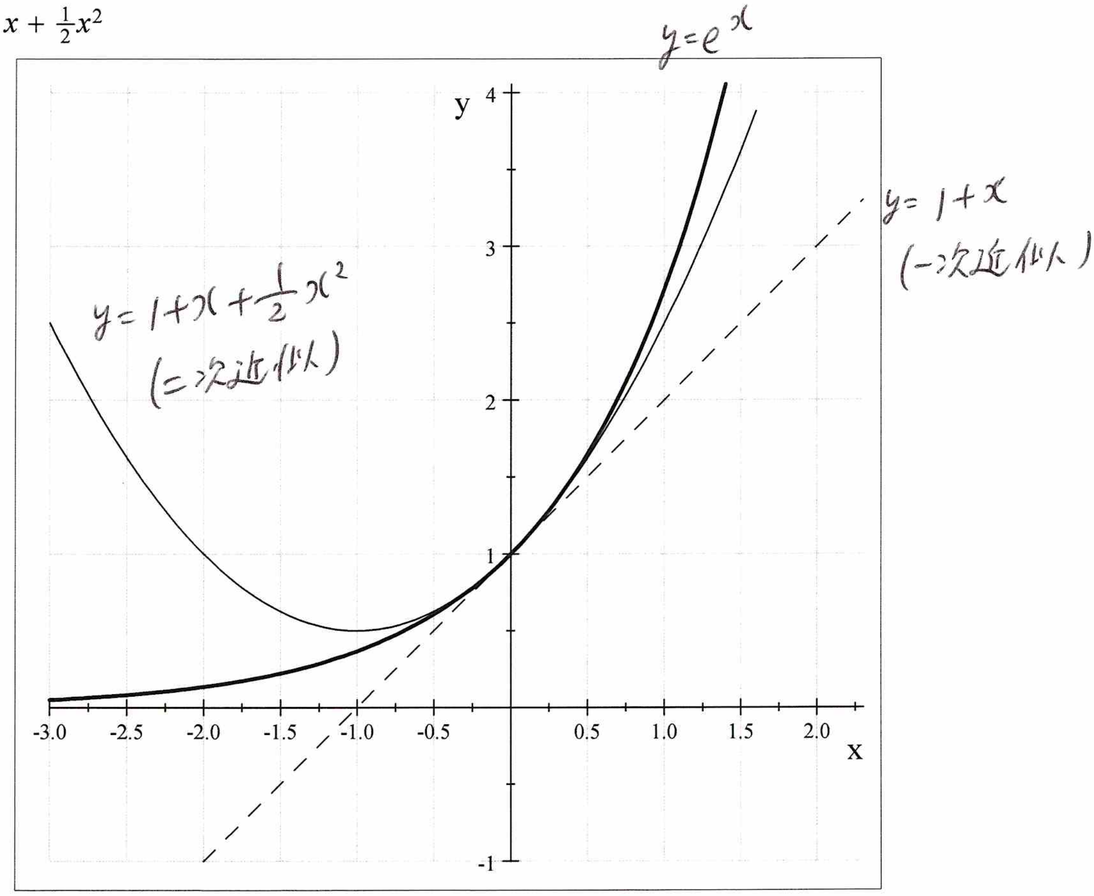
↑

指数関数のマクローリン展開

$y = e^x$ の $x = 0$ の近くでの一次近似
$y = 1 + x$



$y = e^x$ の $x = 0$ の近くでの二次近似
$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$



応用例

$X \sim Po(\lambda)$ ポワソン分布

$\Leftrightarrow p(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$ 確率関数

$(x = 0, 1, 2, \cdots)$

check

$$\boxed{\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = 1}$$

Proof

$$
\begin{aligned}
LHS &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \Big[\underline{1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 + \cdots} \Big]
\end{aligned}
$$

$= e^{\lambda}$ のマクローリン展開

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\
&= 1. \quad //
\end{aligned}
$$

ネピア数e

問題1. ネピア数eについて、

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

を認めたうえで、

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

を証明しなさい。

問題2. aを定数とする。以下を証明しなさい。

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}=e$$

$$(2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=e^{a}$$

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{x}=e^{a}$$

問題3. aを定数とする。このとき、

$$_{n}C_{1}\left(\frac{a}{n}\right)^{1}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-1}$$

$$\to ae^{-a}\quad \text{as } n\to\infty$$

を証明しなさい。

問題4. 関数$f: R\to R$のマクロ—リン展開とは、fを

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^{2}+\frac{1}{3!}f'''(0)x^{3}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^{k}$$

という多項式の極限として表すことである。ここで、$f^{(k)}$はfのk階導関数である。指数関数のマクロ—リン展開が

$$e^{x}=1+x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{4!}x^{4}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$$

となることを確認しなさい。

問題5. 次の値を求めなさい。

$$e^{-a}\left(1+a+\frac{1}{2}a^{2}+\frac{1}{3!}a^{3}+\frac{1}{4!}a^{4}+\cdots\right)$$