確率変数とその期待値・分散

確率変数

(random variable ; r.v.)

何らかの現象を観測しているときに、
確率的に変動する量のこと。

数学的には、標本空間 S から $\mathbb{R}$ への関数で
変数に確率が付与されているもの

$$X : S \to \mathbb{R}$$

ex (コイン投げ)

$S = \{オモテ, ウラ\}$

X : オモテ $\longmapsto 1$ with prob. $1/2$

ウラ $\longmapsto 0$ 〃 $1/2$

確率が付与されている。

ex (サイコロ投げ)

$S = \{ \boxed{1}, \boxed{2}, \cdots, \boxed{6} \}$

$$
\begin{aligned}
X : \boxed{1} &\longmapsto 1 \quad \text{with prob. } 1/6 \\
\boxed{2} &\longmapsto 2 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6 \\
&\vdots \quad \quad \quad \quad \vdots \\
\boxed{6} &\longmapsto 6 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y : \boxed{1} &\longmapsto 0 \quad \text{with prob. } 1/6 \\
\boxed{2} &\longmapsto 0 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6 \\
\boxed{3} &\longmapsto 0 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6 \\
\boxed{4} &\longmapsto 1 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6 \\
\boxed{5} &\longmapsto 5 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6 \\
\boxed{6} &\longmapsto 15 \quad \quad \text{〃} \quad \quad 1/6
\end{aligned}
$$

X と Y は 同じ S 上で定義された r.v. であるが、

r.v. として別物！

期待値

X r.v.

$$E[X] = \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) & \text{if } X: \text{discrete r.v.（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx & \text{if } X: \text{continuous r.v.（連続）} \end{cases}$$

where
- P : Xの確率関数
- f : Xの確率密度関数 (probability density function p.d.f.)

ex (サイコロ投げ)

$$E[X] = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6$$
$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E[Y] = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 15$$
$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

※ XとYは r.v. として別物だが、$E[X]$は等しくなっている。
(後で定義する分散は異なる。)

※ X, Yは r.v. だが $E[X]$, $E[Y]$は定数。

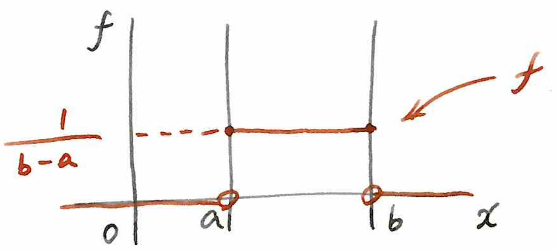
ex ((連続)一様分布) uniform distribution

$X \sim U[a,b]$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

↑

Xの p.d.f.



このとき、Xの期待値 $E[X] = ?$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$x \in [a,b]$ 以外では $f(x) = 0$

$x \in [a,b]$ では $f(x) = \dfrac{1}{b-x}$

$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx$$

$\dfrac{1}{b-a}$ は xと関係ない定数

積分の線型性

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

(aとbの中間)

期待値の性質

(1) $E[\alpha] = \alpha$ 　(α: 定数)

(2) $E[\alpha X] = \alpha E[X]$

(3) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ 　　非常に重要

<u>check</u>

(1) X: 離散 r.v. の場合.

$$E[\alpha] = \sum_i \alpha\, p(x_i)$$

$$= \alpha \underbrace{\sum_i p(x_i)}_{=1} = \alpha.$$

X: 連続 r.v. の場合

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)\, dx$$

$$= \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx}_{=1} = \alpha.$$

(2) X: 離散 r.v. の場合

$$E[\alpha X] = \sum_i \alpha x_i\, p(x_i)$$

$$= \alpha \sum_i x_i\, p(x_i)$$

$$= \alpha E[X].$$

X : 連続 r.v. の場合

$$E[\alpha X] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha x f(x)\, dx$$
$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$
$$= \alpha E[X].$$

(3) 省略.

//

<u>Remark</u>

- $E[\alpha X + \beta Y]$
$$= E[\alpha X] + E[\beta Y] \quad \downarrow (3)$$
$$= \alpha E[X] + \beta E[Y] \quad \downarrow (2)$$

- $E[\alpha X + \beta]$
$$= E[\alpha X] + E[\beta] \quad \downarrow (3)$$
$$= \alpha E[X] + E[\beta] \quad \downarrow (2)$$
$$= \alpha E[X] + \beta \quad \downarrow (1)$$

X r.v.

Def (variance ; 分散)

$$\boxed{V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right]}$$

※ 期待値 $E[X]$ との乖離の2乗 $(X - E[X])^2$ の期待値.

Th (分散公式)

$$\boxed{V[X] = E[X^2] - (E[X])^2}$$

非常によく使う.

Proof

$$\begin{aligned}
V[X] &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2E[X]\cdot X + (E[X])^2\right] \\
&= E[X^2] + E[\underbrace{-2E[X]}_{\text{定数}}\cdot X] + E[\underbrace{(E[X])^2}_{\text{定数}}] \\
&= E[X^2] - 2E[X]\cdot E[X] + (E[X])^2 \\
&= E[X^2] - (E[X])^2.
\end{aligned}$$

期待値の線型性

//

ex

X : オモテ $\mapsto 1$ with Prob. $1/2$
　　ウラ $\mapsto 0$ 〃 $1/2$

Then, $E[X] = \frac{1}{2}$

$V[X] = ?$

・解法 1 (定義を直接用いる)

$X - E[X]$: オモテ $\mapsto 1/2$ with Prob. $1/2$
　　ウラ $\mapsto -1/2$ 〃 $1/2$

$X-E[X]$ も確率的に変動する量なので r.v.

$(X - E(X))^2$: オモテ $\mapsto 1/4$ with Prob. $1/2$
　　ウラ $\mapsto 1/4$ 〃

$$\therefore V[X] = E[(X - E(X))^2]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

・解法 2 (分散公式を用いる)

X^2 : オモテ $\mapsto 1$ with Prob. $1/2$
　　ウラ $\mapsto 0$ 〃 $1/2$

X^2 も r.v.

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}$$

例. サイコロ投げ

$V[X] = E[(X - E[X])^2]$ を求める。

解法1 （分散の定義を直接用いる）

$E[X] = \frac{7}{2}$ なので

（$X - E[X]$ も変動する量なので r.v.）

$X - E[X]$:

$\boxed{1} \longmapsto 1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$

$\boxed{2} \longmapsto 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}$

$\boxed{3} \longmapsto 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{4} \longmapsto 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{5} \longmapsto 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$

$\boxed{6} \longmapsto 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$

$(X - E[X])^2$:

$\boxed{1} \longmapsto \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$\boxed{2} \longmapsto \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\boxed{3} \longmapsto \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\boxed{4} \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\boxed{5} \longmapsto \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\boxed{6} \longmapsto \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$(X - E[X])^2$ も r.v.

$$V[X] = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

← Xの分散は、
r.v. $\left(X - E(X)\right)^2$の期待値.

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}$$

$$+ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{4}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2\left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{35}{12}$$

解法2. (分散公式を用いる)

← X^2をr.v.

X^2 : $\boxed{1} \longmapsto 1^2 = 1$

$\boxed{2} \longmapsto 2^2 = 4$

$\boxed{3} \longmapsto 3^2 = 9$

$\boxed{4} \longmapsto 4^2 = 16$

$\boxed{5} \longmapsto 5^2 = 25$

$\boxed{6} \longmapsto 6^2 = 36$

$$E[X^2] = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 9 + \frac{1}{6}\cdot 16 + \frac{1}{6}\cdot 25 + \frac{1}{6}\cdot 36$$

$$= \frac{91}{6}$$

$$V(X) = E[X^2] - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{1}{12}(182 - 147)$$

$$= \frac{35}{12}$$

例. サイコロ投げ

r.v. Y の分散を分散公式を用いて求める.

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

Y^2: $\boxed{1} \longmapsto 0^2 = 0$

$\boxed{2} \longmapsto 0^2 = 0$

$\boxed{3} \longmapsto 0^2 = 0$

$\boxed{4} \longmapsto 1^2 = 1$

$\boxed{5} \longmapsto 5^2 = 25$

$\boxed{6} \longmapsto 15^2 = 225$

$$E[Y^2] = \frac{1}{6}(0+0+0+1+25+225) = \frac{251}{6}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$= \frac{251}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}(502 - 147)$$

$$= \frac{355}{12}$$

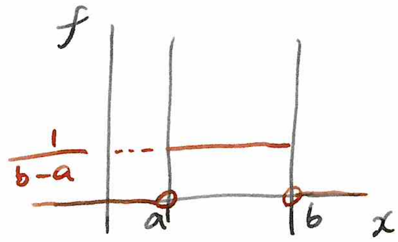
cf. $V[X] = \dfrac{35}{12}$

※ X と Y では、期待値は同じだが、
分散は Y の方がかなり高い.

ex (一様分布)

$X \sim U[a,b]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$E[X] = \dfrac{a+b}{2}$ であった。

分散 $V[X]$ を分散公式を用いて求める。

$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$
$$= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$$
$$= \frac{1}{12}\left[4(a^2+ab+b^2) - 3(a^2+2ab+b^2)\right]$$
$$= \frac{1}{12}(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= \frac{(a-b)^2}{12}$$

X : r.v.

α, β : const.

$\Longrightarrow V[\alpha X+\beta] = \alpha^2 V[X]$

Proof

分散公式

$$
\begin{aligned}
&V[\alpha X+\beta] \\
&= E\left[(\alpha X+\beta)^2\right] - \left(E[\alpha X+\beta]\right)^2 \\
&= E\left[\alpha^2 X^2 + 2\alpha\beta X + \beta^2\right] - \left(E[\alpha X+\beta]\right)^2 \\
&= \left(\alpha^2 E[X^2] + 2\alpha\beta\, E[X] + \beta^2\right) \\
&\qquad - \left(\alpha E[X] + \beta\right)^2 \\
&= \left(\alpha^2 E[X^2] + \underline{2\alpha\beta\, E[X]} + \underline{\beta^2}\right) \\
&\qquad - \left(\alpha^2 (E[X])^2 + \underline{2\alpha\beta\, E[X]} + \underline{\beta^2}\right) \\
&= \alpha^2\left(E[X^2] - (E[X])^2\right) \\
&= \alpha^2 V[X].
\end{aligned}
$$

E[·]の線型性

分散公式

//

※分散公式の証明のためにも期待値の線型性を使っている。

Th. (標準化 r.v.)

X r.v.

$E[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$

$$Z \equiv \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow E[Z] = 0$$
$$V[Z] = 1$$

Proof.

$$E[Z] = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]$$

期待値の線型性

$$= \frac{1}{\sigma} E[X-\mu]$$
$$= \frac{1}{\sigma}\left(E[X] - E[\mu]\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0.$$

$$V[Z] = V\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]$$
$$= V\left[\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} V[X]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2$$
$$= 1.$$

//

Alternative Proof

$$V[Z] = E[Z^2] - \underbrace{(E[Z])^2}_{=0}$$
$$= E[Z^2]$$
$$= E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} E\left[(X-\mu)^2\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} V[X]$$
$$= 1.$$

//

積率母関数

(Moment Generating Function ; MGF)

X : r.v.

$$M(t) \equiv E\left[e^{tX}\right]$$

$$= \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} p(x_i) & \text{if } X \text{: discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx & \text{if } X \text{: conti.} \end{cases}$$

MGFを用いた平均・分散の導出法

$$M'(t) = \begin{cases} \sum_i x_i e^{tx_i} p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)\,dx \end{cases}$$

$$M'(0) = \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \end{cases}$$

$$= E[X].$$

$$M''(t) = \begin{cases} \sum_i x_i^2 e^{tx_i} p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)\,dx \end{cases}$$

$$M''(0) = \begin{cases} \sum_i x_i^2 p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

$$= E[X^2]$$

$$\therefore V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

←分散公式

$$= M''(0) - [M'(0)]^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} E[X] &= M'(0) \\ V[X] &= M''(0) - [M'(0)]^2 \end{aligned}}$$

非常によく用いる!

ex (コイン投げ)

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with prob. } 1/2 \\ 0 & \quad \text{〃} \quad 1/2 \end{cases}$$

• モーメント母関数 $M(t) = ?$

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{t \cdot 1} + \frac{1}{2} \cdot e^{t \cdot 0}$$

$$\therefore M(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2}$$

• $M(t)$ を用いて $E[X]$ を求める。

$E[X] = M'(0)$ であった。

$$M'(t) = \frac{1}{2} e^t$$

$$\therefore E[X] = M'(0) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}$$

• $M(t)$ を用いて $V[X]$ を求める。(解法3)

$V[X] = M''(0) - (M'(0))^2$ であった。

$$M''(t) = \frac{1}{2} e^t$$

$$\therefore M''(0) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore V[X] = M''(0) - (M'(0))^2$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

ex（サイコロ投げ）

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with prob. } 1/6 \\ 2 & \quad // \quad 1/6 \\ \vdots & \quad \vdots \\ 6 & \quad // \quad 1/6 \end{cases}$$

- $M(t) = ?$

$$M(t) = E[e^{tX}]$$
$$= \frac{1}{6}e^{t\cdot 1} + \frac{1}{6}e^{t\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{6}e^{t\cdot 6}$$
$$\therefore M(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}\right)$$

- $E[X] = ?$

$$M'(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t}\right)$$
$$M'(0) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$
$$\therefore E[X] = M'(0) = \frac{7}{2}$$

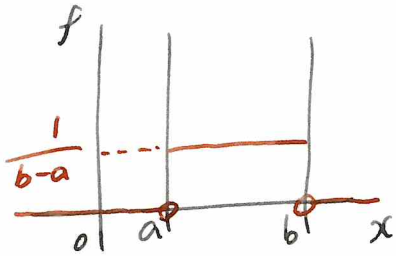
- $V[X] = ?$ (解法3)

$$M''(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 2^2e^{2t} + 3^2e^{3t} + 4^2e^{4t} + 5^2e^{5t} + 6^2e^{6t}\right)$$
$$M''(0) = \frac{1}{6}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 6^2) = \frac{91}{6}$$
$$\therefore V[X] = M''(0) - (M'(0))^2$$
$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4}$$
$$= \frac{35}{12}$$

ex（一様分布）

$X \sim U[a,b]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a,b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



・モーメント母関数 $M(t)$ を求める。

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{1}{t} \left[e^{tx}\right]_{x=a}^{b}$$

$$\therefore M(t) = \frac{1}{b-a} \frac{1}{t} \left(e^{bt} - e^{at}\right)$$

分母に t がくるので

$E[X] = M'(0)$

などを $M(t)$ を使って求めるのには適さない。

確率変数とその期待値・分散

問題1．（分散公式）
期待値の線型性を用いて、確率変数Xについて、分散公式

$$\begin{aligned} V[X] &\equiv E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

を証明せよ。その際、期待値の線型性をどこで用いたか、明示せよ。

問題2．Xを確率変数、α, βを定数として

$$V[\alpha X + \beta] = \alpha^2 V[X]$$

を証明せよ。その際、期待値の線型性をどこで用いたか、明示せよ。

問題3．確率変数Xの期待値を$E[X] = \mu$、分散を$V[X] = \sigma^2$と表す。Xを標準化した確率変数をZとする。すなわち、

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

である。確率変数Zについて、$E[Z] = 0$と$V[Z] = 1$を示せ。

問題4．ゆがみのないコインを投げてオモテが出たら3、ウラが出たら0という確率変数を考える。すなわち、

$$X = \begin{cases} 3 & \text{with probability } 1/2 \\ 0 & \text{with probability } 1/2 \end{cases}$$

である。

(1) Xのモーメント母関数を求めよ。
(2) Xの期待値を積率母関数を用いて求めてみよ。
(3) Xの分散を以下の3通りの方法を用いて求め、結果が一致することを確認せよ。
(a) 定義を直接用いる方法
(b) 分散公式を用いる方法
(c) モーメント母関数を用いる方法

問題5. ゆがみのないサイコロを投げて、出た目の数字を対応させる確率変数を考える。すなわち、

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with probability } 1/6 \\ 2 & \text{with probability } 1/6 \\ \cdots & \cdots \\ 6 & \text{with probability } 1/6 \end{cases}$$

である。

(1)Xのモーメント母関数を求めよ。

(2)Xの期待値を積率母関数を用いて求めてみよ。

(3)Xの分散を以下の3通りの方法を用いて求め、結果が一致することを確認せよ。

(a) 定義を直接用いる方法

(b) 分散公式を用いる方法

(c) モーメント母関数を用いる方法

問題6. (連続型一様分布の期待値と分散)

確率変数Xが一様分布$U[a,b]$に従うとする。

(1)Xの確率密度関数を答え、そのグラフを描け。

(2)Xの期待値$E[X]$を求めよ。

(3)Xの分散$V[X]$を求めよ。

(4)のモーメント母関数を求めよ。