事象の独立性

Def (事象の独立性)

$A, B \subset S$: <u>independent</u>

$\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

※ ${}^{\forall}A \subset S$, A, ϕ : independent

※ $P(A) = 0$ or $P(B) = 0$

$\Rightarrow A, B$: independent

$(\because)$ $P(A \cap B) = 0$ となり,

$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{P(A \cap B)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{P(A)P(B)}}$ が成り立つから。 //

※ $A, B \subset S$: independent

だとわかっているなら,

$P(A)$ と $P(B)$ だけから $P(A \cap B)$ $\left(= P(A)P(B)\right)$ を

計算でき、従って

$P(A \cup B)$, $P(A^c \cap B)$, $P(A|B)$, $P(A|B^c)$

なども計算できる。

※ $P(A \cap B)$ と $P(A) > 0$ がわかっているなら

$P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ← A, B : independent

も計算でき 上と同様に 様々な情報が得られる。

例.

$S = \{ \boxed{1}, \boxed{2}, \cdots, \boxed{6} \}$

$E = \{ \boxed{2}, \boxed{4}, \boxed{6} \}$ 偶数目が出るという事象

$A_4 = \{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4} \}$ 4以下の目が出るという事象

$A_5 = \{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5} \}$ 5以下 〃 〃

$P(E) = 1/2$

$P(A_4) = \dfrac{2}{3}$

$P(A_5) = \dfrac{5}{6}$

$P(E \cap A_4) = \dfrac{1}{3}$

$P(E \cap A_5) = \dfrac{1}{3}$

このとき.

- $P(E \cap A_4) = P(E)P(A_4) \left(= \dfrac{1}{3} \right)$ なので

  EとA₄は独立.

- $\underset{1/3}{\underset{\shortparallel}{P(E \cap A_5)}} \neq \underset{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}}{\underset{\shortparallel}{P(E)P(A_5)}}$ なので

  EとA_5は独立ではない。

例.

ある製品について

A：平均的な消費者がテレビのCMで製品広告にふれる.

B：平均的消費者が看板を見て製品広告にふれる.

$P(A) = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{1}{20}$

A, B：独立とする。

(1) ある消費者がテレビと看板の両方で広告にふれる確率は？

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{80}$ 　 ≒1.25%

A, B：独立

(2) ある消費者が、どちらか一方の広告にふれる確率は？

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{20} - \frac{1}{80}$$

$$= \frac{23}{80}$$

28.75%

(3) ある消費者が、テレビと看板のどちらでも広告にふれない確率は？

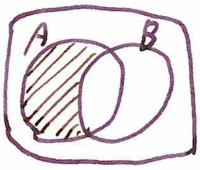
$$P(A^c \cap B^c)$$

$$= P((A \cup B)^c)$$ ドモルガン

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{23}{80} = \frac{57}{80}$$ 71.25%

(4) テレビのCMは見たけど看板は見てない確率は？



$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{80} = \frac{19}{80}$$ 23.75%

(5) 看板は見たけどテレビCMは見てない確率は？

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{20} - \frac{1}{80}$$

$$= \frac{3}{80}$$ 3.75%

Th

$A, B \subset \Omega$

$P(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ **Equivalent**

① A, B : independent

i.e. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

② $P(B|A) = P(B)$

Proof

$$① \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \equiv P(B|A) \qquad P(A) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow ②.$$

//

Cor

$A, B \subset \Omega$

$P(A), P(B) \neq 0$

$\Rightarrow$ **Equivalent**

① A, B : independent

i.e. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

② $P(B|A) = P(B)$ ← 事象Aとは無関係な値

③ $P(A|B) = P(A)$ ← 〃 Bとは 〃

ex.

A : 日本が戦争にまき込まれる。

B : Xさんが総理大臣になる。 $(P(B)>0)$

$$P(A|B) = P(A)$$

(結局アメリカ次第なので誰が日本の総理になってもP(A)は不変。)

このとき、AとBは独立。

ex

A : 今後10年以内に死亡する。

B : 食事に気をつける。 $(P(B)>0)$

$$P(A|B) < P(A)$$

このとき AとBは独立ではない。

Remark

- 2つの事象 A, B が独立か、否か？
  を判定するためには、どのような情報が必要か？

① $P(A), P(B), P(A\cap B)$

② $P(B), P(B|A)$

③ $P(A), P(A|B)$

↑

この3パターン

- A, B が独立であることがわかっていれば、

① $P(A), P(B), P(A\cap B)$

のうち2つがわかれば、残り1つを求めることができる。

② $P(B), P(B|A)$

③ $P(A), P(A|B)$

については、一方がわかれば、他方がわかる。

④ $P(A)$ と $P(B)$ がわかれば、

$P(A|B), P(B|A), P(A\cap B)\ (=P(A)P(B))$ もわかる。

更に

$P(A\cup B)\ (=P(A)+P(B)-P(A)P(B))$ もわかる。

$P(A^c\cap B^c)\ (=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B))$ 〃

問．

2つの事象 A, B は独立で

$$P(A) = \frac{6}{10}$$

$$P(B \mid A) = \frac{1}{2} \quad とする。$$

このとき．

(1) $P(A \mid B)$

(2) $P(A \cap B)$

(3) $P(A \cup B)$ (4) $P(A^c \cap B^c)$

を求めなさい。

解．

(1) $P(A \mid B) = P(A) = \underline{\frac{6}{10}}$

(2) $P(B)$ を求める.

$$P(B) = P(B \mid A) = \frac{1}{2}$$

よって．$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{10}}$

(3) $P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10}$$

$$= \underline{\frac{8}{10}}$$

(4) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$

$$= 1 - P(A \cup B) = \underline{\frac{2}{10}}$$

Th

> $A, B \subset S$ independent
> $\Longrightarrow A^c, B^c (\subset S)$: independent

Proof

Since A and B are independent,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad \text{— (*)}$$

We will prove that $\underline{P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)}$.

$$
\begin{aligned}
& P(A^c \cap B^c) \\
& \quad = P((A \cup B)^c) && \text{ド・モルガン} \\
& \quad = 1 - \underline{P(A \cup B)} && \text{確率の性質} \\
& \quad = 1 - [\underline{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}] && \text{加法定理} \\
& \quad = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
& \quad = 1 - P(A) - P(B) + P(A) P(B) && (*) \\
& \quad = (1 - P(A))(1 - P(B)) \\
& \quad = P(A^c) P(B^c) && \text{確率の性質}
\end{aligned}
$$

//

※ 仮定 $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ を使うため、"補集合"を外して考えるのがコツ。
仮定を使った後、また補集合の話にもどす。

$$A, B \subset S : \text{independent}$$
$$\Longrightarrow A^c, B : \text{independent}$$

Proof

We will prove that

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B).$$

It holds that

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(A^c)P(B). \end{aligned}$$

A, B : independent

//

Def.

$A, B, C\ (\subset S)$: independent

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(C \cap A) &= P(C)P(A) \end{aligned}$$

Remark

$A, B, C\ (\subset S)$: independent

$\Rightarrow$ A, B : independent

B, C : 〃

C, A : 〃

※ 逆は言えない。

Th.

$A, B, C\ (\subset S)$: independent

$\Rightarrow A^c, B^c, C^c$: independent

Proof

$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$

Since A and B are independent, A^c and B^c are also independent.

Thus, OK.

$P(B^c \cap C^c) = P(B^c)P(C^c)$

$P(C^c \cap A^c) = P(C^c)P(A^c)$

OK

$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c)P(B^c)P(C^c)$

$$
\begin{aligned}
LHS &= P((A \cup B \cup C)^c) \\
&= 1 - P(A \cup B \cup C) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) \\
&\qquad - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)] \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)P(B) \\
&\qquad + P(B)P(C) + P(C)P(A) - P(A)P(B)P(C) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) \\
&= P(A^c)P(B^c)P(C^c).
\end{aligned}
$$

//

Th

A, B, C (c.s.): independent

$\Rightarrow A, B, C^c$: independent

Proof

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(B \cap C^c) = P(B)P(C^c)$

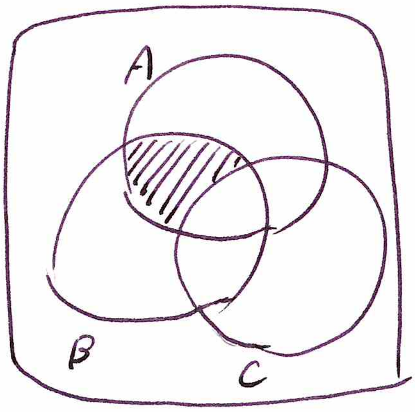
$P(C^c \cap A) = P(C^c)P(A)$

OK.

$P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c)$

$$\begin{aligned} LHS &= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(B) - P(A)P(B)P(C) \\ &= P(A)P(B)(1 - P(C)) \\ &= P(A)P(B)P(C^c). \end{aligned}$$

//



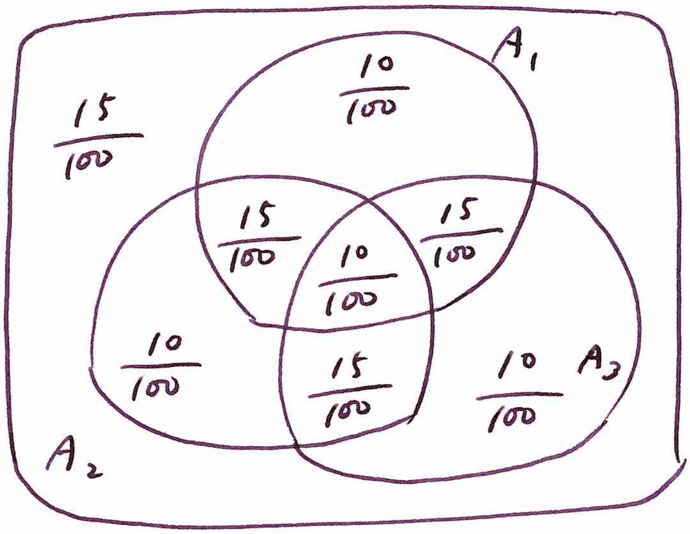
$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

$= A \cap B$

例.

$$\left.\begin{array}{ll} A_1, A_2 & : \text{independent} \\ A_2, A_3 & : \quad〃 \\ A_3, A_1 & : \quad〃 \end{array}\right\} \text{— (*)}$$

$$\not\Rightarrow \; P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$



$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_3) = P(A_3 \cap A_1) = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ (*) are met.

However,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{10}{100} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$$

Th

$$\boxed{\begin{array}{l} A, B, C \subset S : \text{independent} \\ \Longrightarrow A \cap B,\ C : \text{independent} \end{array}}$$

Proof.

We will prove that $\underline{P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) P(C)}$.

Since A, B, C are independent,

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \quad \text{— } (*)$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} & P((A \cap B) \cap C) \\ & = P(A \cap B \cap C) \\ & = \underline{P(A) P(B)} P(C) \\ & = \underline{P(A \cap B)} P(C). \end{aligned}$$

A, B, C : independent

$(*)$

//

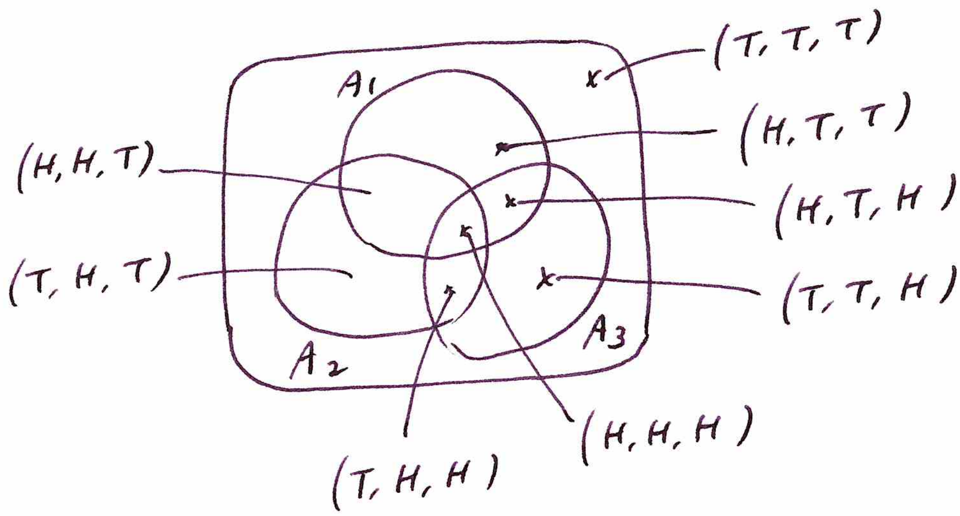
ex

コインを3回投げる

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i = H \text{ or } T \ (i=1,2,3)\}$

$A_i \ (\subset S)$ 第 i 回目に H が出るという事象

$A_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i = H\} \quad (i=1,2,3)$



- A_1, A_2, A_3 : independent
- 従って $A_1 \cap A_2$, A_3 : independent

$\therefore \ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = P(A_3)$

1回目, 2回目が共に
Hだったとき
3回目もHが出る確率

3回目にHが出る確率

1, 2回目が共にHなら, 次はTが出そうな
気がするが, 実際には, そうはならない。

Def

$A_1, A_2, \cdots, A_n \ (\subset S)$: independent

$\iff \forall m = 2, 3, \cdots, n,$

$\forall B_1, \cdots, B_m \in \{A_1, \cdots, A_n\},$

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_m) = P(B_1) \cdots P(B_m)$$

事象の独立性

問題1. A, Bを独立な事象で、$P(B) > 0$とする。このとき、$P(A|B) = P(A)$であることを証明せよ。

問題2. ある会社では、社員採用時の面談を5段階で評価している。採用時に高評価(4か5)で入社した人は、例年、新入社員全体の2割である。一方、この会社では入社3年以内に退職する人が、同期の社員のうち3割にも及び、社内で問題視されている。採用時の面談の評価と3年以内の退職率が無関係かどうかが社内で話題になっているのだが、この点を判定するためには、追加的にどのような情報が必要か？　また、その情報があれば、どのようにして採用時の面談の評価と3年以内の退職率の関係を明らかにできるか？

問題3. あなたは自動車メーカーX社の営業担当であるとする。X社としては、来年度以降、フランスの特にA地方での販売を強化する計画である。そのために、情報収集として自動車を所有しているフランス人にインタヴューする状況を考える。フランス人の2割がA地方の出身者である。また、フランスでのX社製自動車のシェアは1割だという。X社製自動車のシェアは、フランスのどの地方でも均一として、以下の問いに答えなさい。

(1)インタヴュー時に、相手の人がA地方出身で、かつX社製の自動車に乗っている確率はいくらか？

(2)インタヴューに応じてくれたフランス人が、A地方出身またはX社製の自動車に乗っている確率はいくらか？

(3)インタヴューに応じてくれたフランス人が、A地方出身でもなければX社製の自動車に乗ってもいない確率はいくらか？

(4)インタヴューに応じてくれたフランス人が、A地方出身ではあるが、X社製の自動車に乗っていない確率はいくらか？

(5)インタヴューに応じてくれたフランス人が、A地方出身ではないが、X社製の自動車に乗っている確率はいくらか？

問題4. ある会社は、自社の製品を宣伝するためにテレビCMと立て看板を利用している。アンケート調査の結果、CMを見た人ことのある人は5割、CMを見たことのある人の中で立て看板を見たことのある人は1割であった。消費者がテレビCMを見ることと立て看板を見ることは無関係であるする。このアンケート結果から類推するに、以下の(1)-(3)の値はどれぐらいだろうか。また、それ以外にどのようなことが分かるか、考えてみよ。

(1)消費者が、テレビCMと立て看板の両方を目にする確率

(2)消費者が、テレビCMか立て看板のどちらかを目にする確率

(3)消費者が、テレビCMと立て看板のどちらも目にしない確率

問題5. A, Bを独立な事象とする。このとき、A^CとB^Cも独立であることを証明せよ。

問題6. A, Bを独立な事象とする。このとき、AとB^Cも独立であることを証明せよ。

問題7. A, B, Cを独立な事象とする。このとき、A, B^C, C^Cも独立であることを証明せよ。

問題8.

(1)A_1, A_2, A_3, A_4が独立な事象であることの定義は、いくつの条件から構成されるか？

(2)A_1, A_2, A_3, A_4が独立な事象であることの定義を実際に書き下してみなさい。

解答

問題8.

（1）A_1, A_2, A_3, A_4が独立な事象であることの定義式の数は、A_1, A_2, A_3, A_4から4つ取り出す取り出し方の数、3つ取り出す取り出し方の数、2つ取り出す取り出し方の数の合計である。よって、それは、

$$ {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_4C_2 = 1 + 4 + 6 = 11 $$

より11の条件式から構成される。

（2）A_1, A_2, A_3, A_4が独立な事象であることの定義は、以下の11の式となる:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4), \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3), \\
P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_2)P(A_3)P(A_4), \\
P(A_3 \cap A_4 \cap A_1) &= P(A_3)P(A_4)P(A_1), \\
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2), \\
P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3), \\
P(A_1 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_4), \\
P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3), \\
P(A_2 \cap A_4) &= P(A_2)P(A_4), \\
P(A_3 \cap A_4) &= P(A_3)P(A_4).
\end{aligned}
$$