集合論(Set Theory)

(1) 集合、直積

(2) 合併集合、共通部分、部分集合、
集合の相等関係、空集合

(3) 分配法則、補集合、ド・モルガンの法則

(4) 互いに排反

集合

集合(set)とは，ものの集まりのこと.

ただし，集まる範囲のあいまいな対象は集合としては扱わない.
『ものすごく大きい数の集合』,
『背の高い子供の集合』
などは集合として扱わない.

集まっている対象を、集合の**要素** または **元**(げん)(element)という.
要素を中カッコ{　}でくくって，集合を表すことが多い.

例. 大江戸小学校6年3組の子供の集合= {太郎君，花子さん，…}

太郎君∈大江戸小学校6年3組の子供の集合
などと書く.
記号∈は，elementの頭文字が変形したものだと思えばよい.

集合(set)とは，ものの集まりのことであり，要素を書き並べる順序は問われない.

例. 大江戸小学校6年3組の子供の集合
= {太郎君，花子さん，…}
= {花子さん，太郎君，…}

中カッコ{　}の中を縦棒(またはコロン:)で区切り，左に要素を代表する記号，右に要素が満たすべき条件を書くこともある。

例. B = {x | xは大江戸小学校6年3組の男子}
= {x : xは大江戸小学校6年3組の男子}
このとき，太郎君$\in B$ だが，花子さん$\notin B$ である.

数の集合

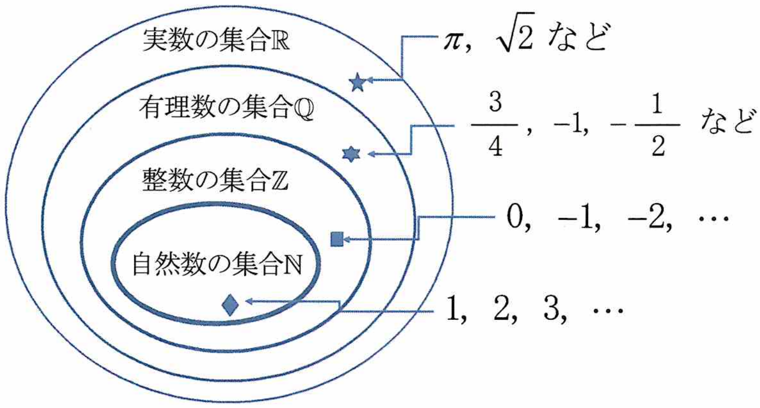
集合の中でも特によく使うのは，“数”の集合である．

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$　自然数(natural number)の集合
$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \cdots\}$ 整数(integer)の集合
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ 有理数(rational number)の集合
$\mathbb{R}$　実数(real number)の集合．
有理数に無理数(irrational number)を合わせたもの．

無理数は，分数としては表されない数．
これを小数で表現すると，数字が無限に続き，それは循環もしない．
円周率 や などが無理数の例として有名だろう．

実数全体の集合は数直線(number line)と同一視できる．
数直線は，下の図のようなスキマのない直線である．

実数は必ず数直線の上にのっており，逆に数直線上の点には実数が対応する．
(数直線上の点が，必ずしも自然数や整数，有理数を表すわけではない．)



順序対

2つの集合

$$X = \{a, b\}$$
$$Y = \{1, 2, 3\}$$

を考える。

Xの要素とYの要素を順番に並べて（　）でくくったものを，
両者の**順序対**という.
例えば，$(a, 2), (b, 3)$など.

順序対は，並んでいる順番が大事.
例えば，$(a, 2) \neq (2, a)$である.

それに対して，集合は『ものの集まり』であり，集めたものを
書き並べる順番は問われなかった.
例えば，$\{a, 2\} = \{2, a\}$である.

直積集合

Xの要素とYの要素を順番に並べた順序対をすべて集めた集合を，
XとYの**直積（集合）**といい，$X \times Y$と書く.
今の場合，$X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$である.

特に，自分自身との直積を考えることもある.
今の場合，

$$X \times X = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\},$$
$$Y \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

である. これらを、

$$X^2 = X \times X, \qquad Y^2 = Y \times Y$$

と書く.

特によく用いられるのは，実数の集合同士の直積

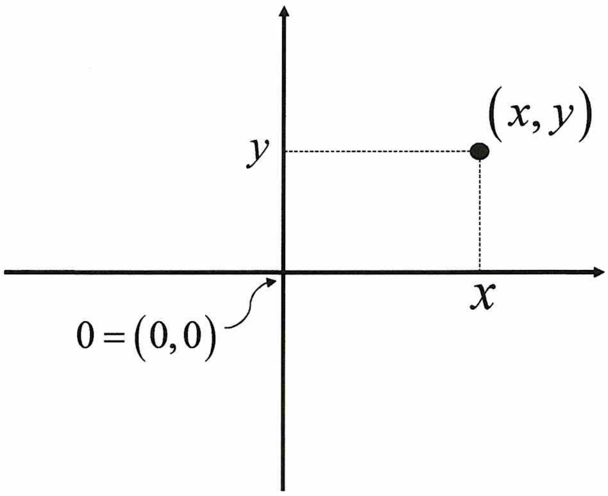
$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

である.

例えば、$(-2,\ \pi) \in \mathbb{R}^2$ である.

$\mathbb{R}^2$の要素（つまり，順序付けられた2つの実数の組）は，座標平面の点と同一視される.

つまり，実数2つの順序対が与えられれば，平面上の点がひとつ決まり，逆に平面上の点がひとつ与えられれば，実数2つの順序対が決まる.



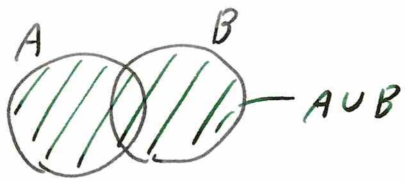
A set 集合

ものの集まり.

合併集合

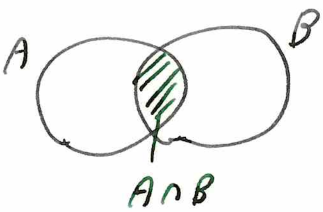
A, B sets

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$ $= B \cup A$



順番を変えても集合として変わらない

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$ $= B \cap A$



← 共通部分

例

$A = \{a, b, c, d, e\}$

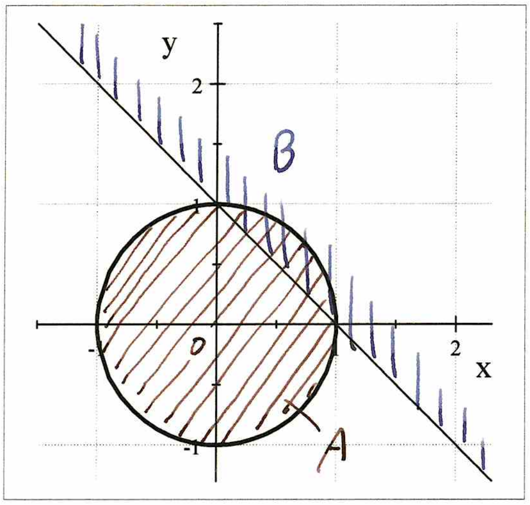
$B = \{d, e, f\}$

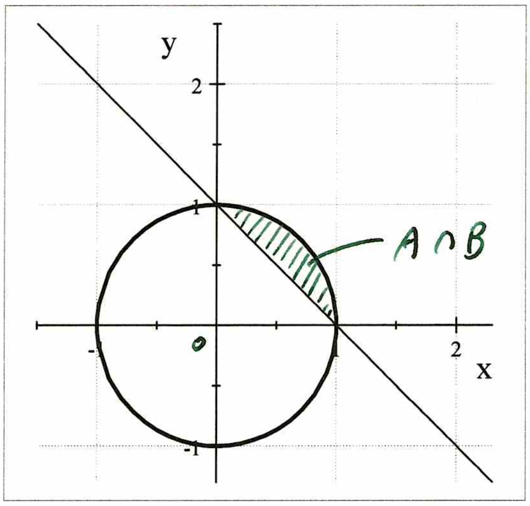
Then, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

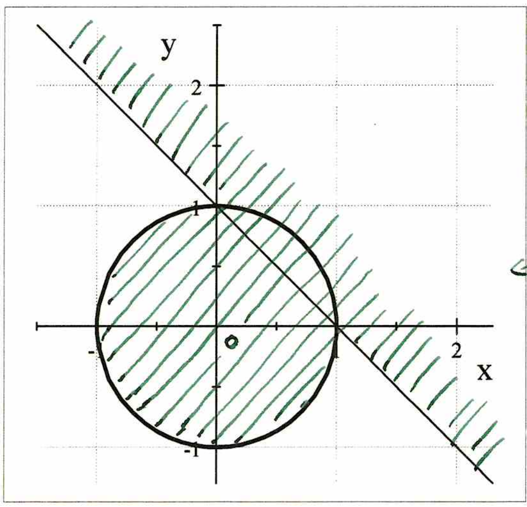
$A \cap B = \{d, e\}$

集合論の初歩

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x + 1\}$$





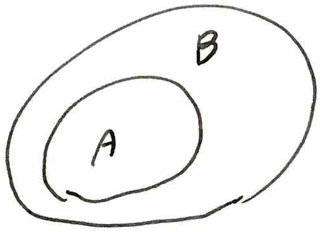


$A \cup B$

- $A \subset B$　AはBの<u>部分集合</u>
subset

$\iff x \in A \Rightarrow x \in B$

$\iff {}^{\forall} x \in A,\ x \in B$



<u>ex</u>

$A = \{a, b\}$

$B = \{a, b, c\}$

$C = \{b, c, d, e, f, g, h\}$

Then, $A \subset B$

$A \not\subset C$

$B \not\subset A$

$\cdots$

- $A = B$ ← 集合として等しい

$\iff A \subset B$ and $B \subset A$

同じ記号を用いているが、小学校で習う2つの実数が等しいという意味のイコールとは異なる。

<u>ex</u>

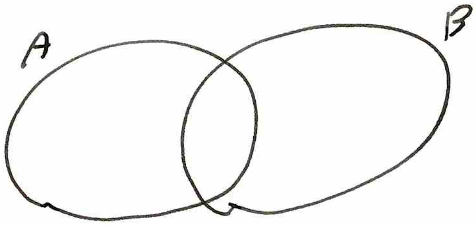
$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$

集合は"ものの集まり"

ものを集めただけであって、書き並べる順番は問われない。

Th

$A \cap B \subset A,\ B \subset A \cup B$



ex

$A = \{a, b, c\}$

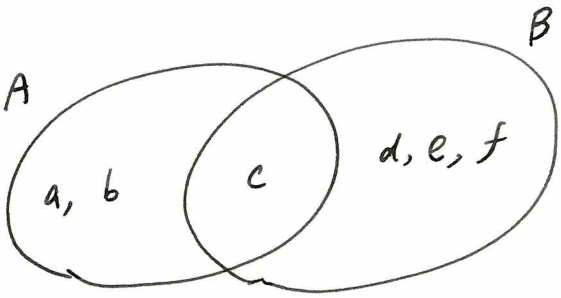
$B = \{c, d, e, f\}$

Then,

$A \cap B = \{c\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\therefore A \cap B \subset A,\ B \subset A \cup B$

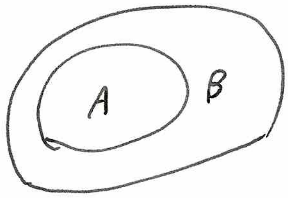


Th

$A \subset B$

$\Longrightarrow$ ① $A \cup B = B$

② $A \cap B = A$



- ϕ 空集合, empty set

  要素を持たない集合

ex

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \phi$$

ex

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{d, e\}$

Then,

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

$A \cap B = \phi$.

//

$$\boxed{\begin{aligned} A \cap \phi &= \phi \\ A \cup \phi &= A \end{aligned}}$$

<u>check</u>

$A \cap \phi = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in \phi\}$

・$x \in \phi$ をみたす x は存在しない。

・「$x \in A$ と $x \in \phi$ の両方をみたすものの集まり」ということだが、そのようなものは存在しない。

$\therefore A \cap \phi = \phi$.

$A \cup \phi = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in \phi\}$

・『$x \in A$ または $x \in \phi$』をみたすものの集まりということだが、$x \in \phi$ をみたすものは存在しない。
したがって $x \in A$ と同値。

$\therefore A \cup \phi = A$

A set

$\Longrightarrow \phi \subset A$

i.e. $x \in \phi \Longrightarrow x \in A$

空集合は、任意の集合の部分集合になる。

$\underbrace{x \in \phi}_{} \Longrightarrow x \in A$

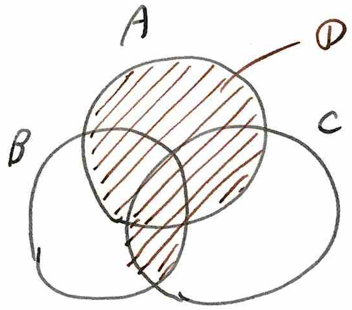
前提がみたされない。
その場合、その命題は真と考える。

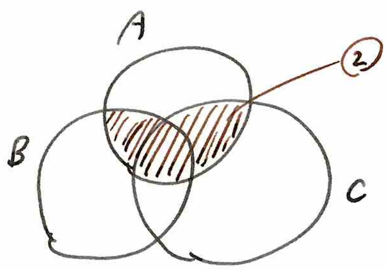
ex
『赤ならば止まれ』

青の場合は、止まってもすすんでも
どちらでもよい。

① $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

② $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$





ex

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, c, d\}$

$C = \{a, c, e\}$

Then,

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

$B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$

$C \cup A = \{a, b, c, e\}$

$A \cap B = \{b, c\}$

$B \cap C = \{c\}$

$C \cap A = \{a, c\}$

① $A \cup (B \cap C)$

$= \{a, b, c\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

$= \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, c, e\} = \{a, b, c\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

② $A \cap (B \cup C)$

$= \{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$= \{b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$

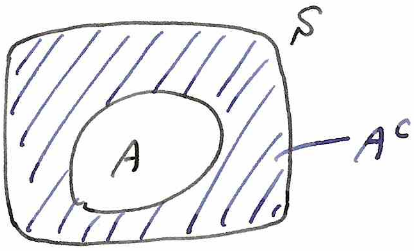
$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

//

S set, $\neq \phi$

$A \subset S$

- $A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$ Aの補集合



$\boxed{\begin{array}{l} A \cup A^c = S \\ A \cap A^c = \phi \end{array}}$

$\boxed{A = A \cap S}$

$\boxed{\begin{array}{l} S^c = \phi \\ \phi^c = S \end{array}}$

check

$S^c \equiv \{x \in S \mid x \notin S\} = \phi.$

$\phi^c \equiv \{x \in S \mid x \notin \phi\} = S$

//

ex

$S = \{a, b, c, d, e\}$

$A = \{a, c, e\}$

Then, $A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$

$= \{b, d\}$

check

$A \cup A^c = \{a, c, e\} \cup \{b, d\}$

$= \{a, c, e, b, d\}$

$= \{a, b, c, d, e\}$

要素を書き並べる順序はどうでもいい。

$= S$

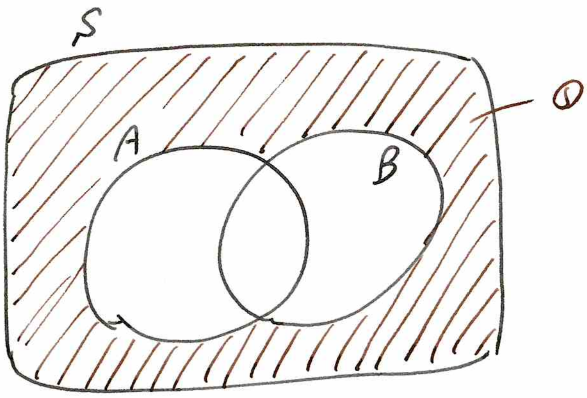
$A \cap A^c = \{a, c, e\} \cap \{b, d\}$

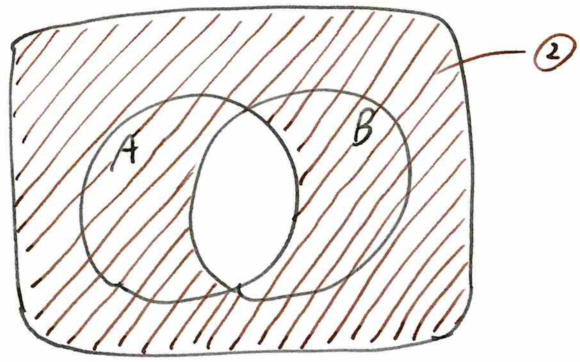
$= \phi.$

ド・モルガンの法則

① $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

② $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$





※ド・モルガンの法則は集合の数が何個の場合であっても成り立つ。(無限個でもよい。)

① $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

② $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

ex

$S = \{a, b, c, d, e\}$

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e\}$

Then,

$A^c = \{e\}$

$B^c = \{a, b\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\} \ (= S)$

$A \cap B = \{c, d\}$

$(A \cup B)^c = \phi$

$(A \cap B)^c = \{c, d\}^c = \{a, b, e\}$

$A^c \cap B^c = \phi$

$A^c \cup B^c = \{a, b, e\}$

$\therefore \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (= \phi)$

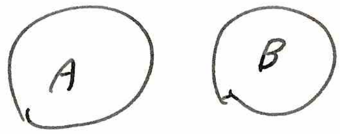
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (= \{a, b, e\})$

ド・モルガンの法則が成り立っている！

A, B sets

A, B <u>mutually exclusive</u>　　互いに排反

$\Longleftrightarrow A \cap B = \phi$　　disjoint ともいう

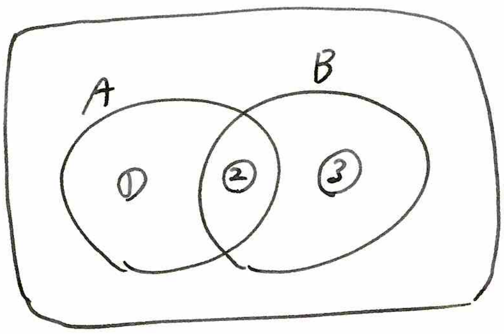


A, B, C mutually exclusive

$\Longleftrightarrow A \cap B = \phi,\ B \cap C = \phi,\ C \cap A = \phi$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ mutually exclusive

$\Longleftrightarrow A_i \cap A_j = \phi \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n\ ;\ i \neq j)$



$\overset{①}{A \cap B^c},\ \overset{②}{A \cap B},\ \overset{③}{A^c \cap B}$

↑

mutually exclusive

$$\boxed{A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)}$$

mutually exclusive

ex

$S = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e\}$

Then,

$A^c = \{e, f\}$

$B^c = \{a, b, f\}$

$A \cap B^c = \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, f\}$

$= \{a, b\}$

$A \cap B = \{c, d\}$

$A^c \cap B = \{e, f\} \cap \{c, d, e\}$

$= \{e\}$

$\therefore$ $A \cap B^c$, $A \cap B$, $A^c \cap B$: mutually exclusive

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

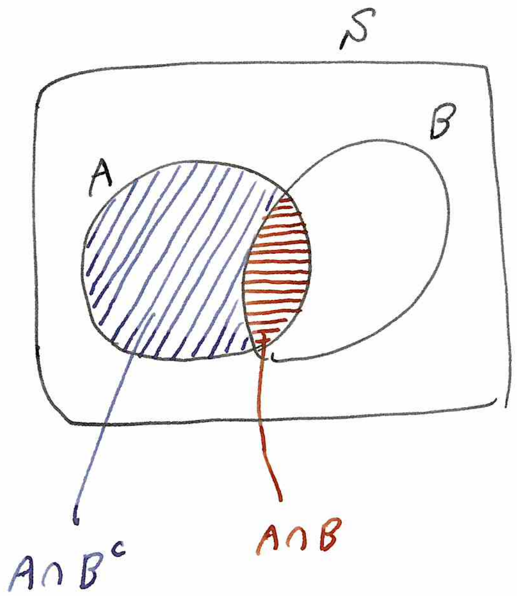
$= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

//

$A, B \subset S$

$\Rightarrow A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

mutually exclusive



問題1.

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4\}$とする。このとき、$B \subset A$であるが、以下が成り立っていることを確認せよ。また、ベン図を用いて図示してみよ。

$$(1)\ A \cup B = A$$

$$(2)\ A \cap B = B$$

問題2.

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,3,5\}$とする。このとき、以下が成り立っていることを確認せよ。また、ベン図を用いて図示してみよ。

$$(1)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(2)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

問題3.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6\}$とする。このとき、以下のド・モルガンの法則が成り立っていることを確認せよ。また、ベン図を用いて図示してみよ。

$$(1)\ (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(2)\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

問題4.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4\}$とする。このとき、$B \subset A$であるが、以下が成り立っていることを確認せよ。また、ベン図を用いて図示してみよ。

$$A = B \cup (A \cap B^C)$$

問題5.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6\}$とする。このとき、Aが

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

と互いに排反な二つのSの部分集合$A \cap B$、$A \cap B^C$の合併として表されることを確認せよ。また、ベン図を用いて図示してみよ。

問題6.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6\}$, $C = \{1,3,5\}$とする。このとき、以下のド・モルガンの法則が成り立っていることを確認せよ。また、ベン図を用いて図示してみよ。

$$(1)\ (A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C$$

$$(2)\ (A \cap B \cap C)^C = A^C \cup B^C \cup C^C$$

問題7．

日本の会社で働くX氏は、女性の同性愛者である。日本で社会通念上ハラスメントと受け取られる可能性の高い言動の集合をA、X氏がハラスメントと受け取る可能性のある言動の集合をBとする。

（1）X氏についてハラスメント問題を考えるうえで、グレーゾーンと考えられる言動の集合をベン図を書いて示し、どのような言動がそこに含まれるか考えてみよ。

（2）同様に、黒と判定される言動の集合についても考えよ。

問題8．

ある会社の社員全員の集合をS、その会社の社員で営業担当経験者の集合をA、TOEIC800点以上の社員の集合をB、20代の社員の集合をCとする。

（1）来年度から、海外の支社に社員を一人送ることになった。現地で営業を担当してもらう予定で若手を希望しているという。経営陣としては、誰を送るべきか考えている。ベン図を書いて該当する箇所を示せ。

（2）長年営業で活躍してきたベテラン社員が、退職することになった。そのため会社としては、人員補強を考えている。（1）で書いたベン図のどこに該当する人材を採用すればよいだろうか?