組合せ，二項定理

組合せ　combination

nコの異なるものからrコを取り出すとき、
選ばれたrコの内容を組合せという。
(並べる順番は関係ない。)

組合せの数

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{{}_nP_r}{r!} $$

例

$$ {}_3C_2 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3 $$

※ 順列 $ {}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3\cdot 2 = 6$

(①, ②), (①, ③), (②, ①), (②, ③),
(③, ①), (③, ②)

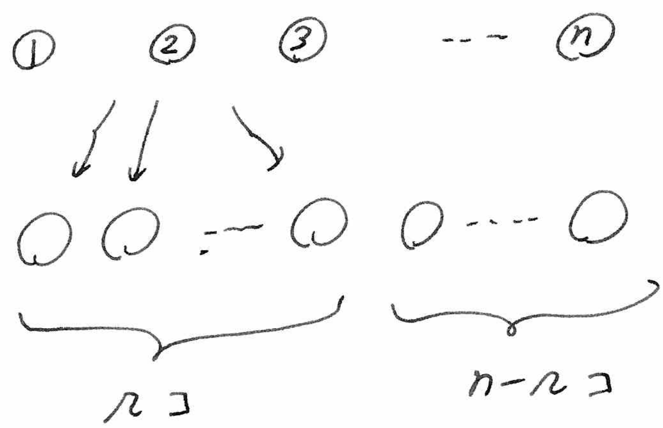
↑ 3つの異なるものから2つ取り出して並べる
並べ方の数.

組合せにおいては、例えば(①, ②)と(②, ①)は
区別しない。
なので {①, ②}, {②, ③}, {③, ①} の3通り。

説明

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

nコの異なるものからrコを取り出す状況



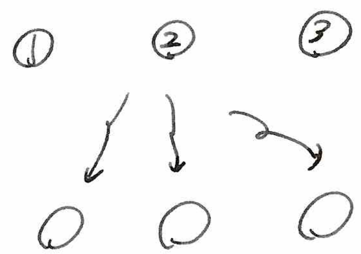
取り出すのはrコだけなので
こちら側の並べ方は関係ない。
この点については順列と同じ。

組合せでは、取り出したrコの並べ方も問わない。
rコの並べ方は$r!$通りあるが、それらを
"ひとまとめに"してしまう。

そのため、 ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$ となる。

順列と組合せの違い：例示

$$ {}_3P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 6 $$



3コの異なるものから

3コ取り出して並べる。

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1, 2, 3), & (1, 3, 2), \\
(2, 1, 3), & (2, 3, 1), \\
(3, 1, 2), & (3, 2, 1)
\end{array}\right\} 6
$$

$$ {}_3C_3 = \frac{3!}{(3-3)!\,3!} = 1. $$

これらを全て同じものとみなす。

例.

ある会社のある部署では7人のチームで仕事をしている。

(1) 来週支店との打ち合せに2人で出かけることになった。
打ち合せに出かける社員の組合せは何通りあるか？

(2) 5人で出かける場合はどうか？

解

(1) 異なる7人から2人を選出するとき、その選ばれた2人の組み合せの数で、その2人の並び方は問題にされないので、次のように計算できる。

$$
{}_7C_2 = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21 \text{ 通り}
$$

(2) 同様に考えて

$$
{}_7C_5 = \frac{7!}{(7-5)!\,5!} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21 \text{ 通り}
$$

cf. ${}_7P_2 = 42$

${}_7P_5 = 2520$

例

ある会社のある部署

40代　5人
30代　7人
20代　10人

が在籍している。

この中から 40代1人，30代2人，20代4人

の7人チームを1つ選出したい。

何通りの組合せの数があるか？

解

30代の7人から2人を選ぶ選び方の数は

${}_7C_2$ である。

同様に 20代の10人から4人を選ぶ選び方の数は

${}_{10}C_4$ である。

よって 求めるチームの選び方の数は

$$5 \times {}_7C_2 \times {}_{10}C_4$$ ← 積の法則

$$= 5 \times 21 \times 210$$

$$= 22{,}050 \text{ 通り}$$

例.

ある会社のある部署

女性3人, 男性4人, 合計7人のチーム.

会社の新たなプロジェクトのため, この部署から

2人拠出することになった。

(1) 男女を問わず7人から2人選ぶ選び方は

何通りあるか?

$$ {}_7C_2 = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21\text{通り}. $$

(2) 女性から2人拠出することになった。

この場合の選び方は何通りあるか?

$$ {}_3C_2 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 3\text{通り}. $$

(3) 男性だけから2人拠出する場合

$$ {}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2} = 6\text{通り}. $$

(4) 男女から1人ずつ選ぶ場合.

女性からの選ばれ方は ${}_3C_1 = 3$ 通り,

男性 〃 〃 ${}_4C_1 = 4$ 通りある.

よって ${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 12$ 通り. ← 積の法則

(5) 少なくとも女性が1人選ばれる選び方は何通りあるか?

「7人から2人選び選び方の数」から

「男性だけから2人選ぶ選び方の数をひけばよい。

従って $21 - 6 = 15$ 通り.

例.

ある会社の大卒の新入社員は、

理系学部出身者　5人
文系　〃　〃　10人
外国語　〃　〃　3人

である。
この中から2人選んで海外支社との打ち合せに参加させることになった。
少なくとも1人、外国語学部出身者が含まれる選び方は何通りあるか？

解.

外国語学部出身者が3人、その他が15人、合計18人の大卒新入社員である。
この18人の中から2人を選ぶ選び方の数は

$$ {}_{18}C_2 = \frac{18!}{(18-2)!\,2!} = \frac{18\cdot 17}{2} $$

$$ = 153 \text{通り} $$

である。また外国語学部出身者が全く含まれない選び方の数は、

$$ {}_{15}C_2 = \frac{15!}{(15-2)!\,2!} = \frac{15\cdot 14}{2} $$

$$ = 105 \text{通り} $$

である。求める「少なくとも1人、外国語学部出身者が含まれる選び方の数」は、全ての選び方の数153通りから外国語学部出身者が全く含まれない選び方の数105通りを引けばよい。よって　153 − 105 ＝ 48通り。

$$\boxed{\begin{array}{l} ① \ {}_nC_0 = 1 \\ ② \ {}_nC_1 = n \\ ③ \ {}_nC_{n-1} = n \\ ④ \ {}_nC_n = 1 \end{array}}$$

check

① $${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = 1$$

② $${}_nC_1 = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$$

nコから1コ取り出すときの選ばれる内容の数

③ $${}_nC_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!\,(n-1)!} = n$$

nコからn-1コ取り出すときの選ばれる内容の数なので、1コ残すときの残し方の数に等しい。

④ $${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = 1$$

nコからnコを選ぶときの選ばれる内容の数だから1通り。

※ ${}_nC_0 = {}_nP_0$

${}_nC_1 = {}_nP_1$

$$\boxed{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}}$$

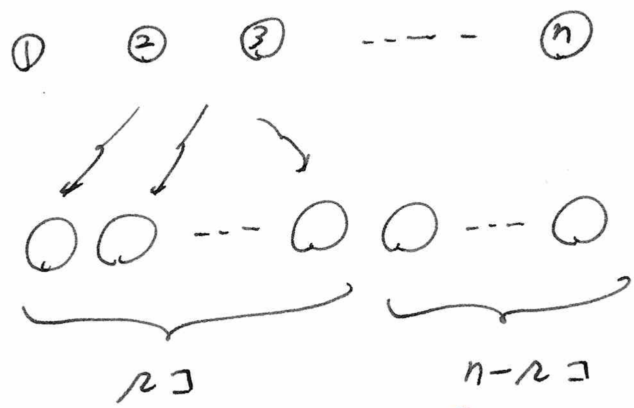
check

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r))!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}_nC_r .$$

//

${}_nC_r$ の意味は？



nコからrコ選ぶ。
(n−rコは残る)
このときの選び方の数

それぞれのグループ内での並び方は問わない。

${}_nC_{n-r}$ の意味は？

nコから n−rコ選ぶ。このときの選び方の数。
(rコは残る。)

よって ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ となる。

${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

- $r=0$ のとき

  ${}_nC_0 = {}_nC_n$

- $r=1$ のとき

  ${}_nC_1 = {}_nC_{n-1}$

- $r=2$ のとき

  ${}_nC_2 = {}_nC_{n-2}$

  ⋮

※ 10人の中から3人の合格者を選ぶときの選び方の数

${}_{10}C_3$

10人の中から7人の不合格者を選ぶときの選び方の数

${}_{10}C_7$

$\therefore {}_{10}C_3 = {}_{10}C_7$

$$\boxed{{}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r}$$

check

$$RHS = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

$$= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,r!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,r!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,r!}\,r + \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,r!}\,(n-r)$$

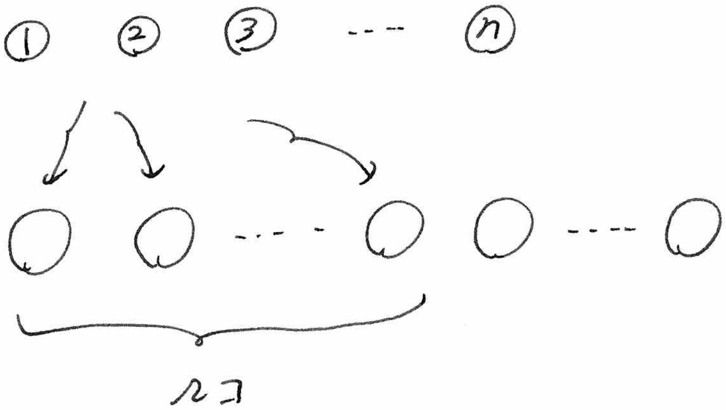
$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,r!}\left(r + (n-r)\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,r!}\cdot n$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}_nC_r = LHS.$$

//

直感的説明



nコから rコを選ぶ
その場合の数が
$_nC_r$

ここで ①〜ⓝ を
① と ②〜ⓝ に分けて考える。

そして 2通りに場合分けして考える。

(i) <u>① が選ばれる場合.</u>

これは残り $n-1$ コの中から $r-1$ コが選ばれることを意味する。その場合の数は $_{n-1}C_{r-1}$ 。

(ii) <u>① が選ばれない場合</u>

これは、残り $n-1$ コの中から r コが選ばれることを意味する。その場合の数は $_{n-1}C_r$ 。

(i) or (ii) なので

$_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ となる。

和の法則

二項定理

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k}$$

$(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$

- $n=0$

$LHS = 1$

$$RHS = \sum_{k=0}^{0} {}_0C_0\, x^{-k} y^k$$

$$= {}_0C_0\, x^{-0} \cdot y^0 = 1.$$

- $n=1$

$LHS = x+y$

$$RHS = \sum_{k=0}^{1} {}_1C_k\, x^{1-k} y^k$$

$$= {}_1C_0\, x^1 y^0 + {}_1C_1\, x^{1-1} y^1$$

$$= x+y.$$

- $n=2$

$LHS = (x+y)^2$

$$RHS = \sum_{k=0}^{2} {}_2C_k\, x^{2-k} y^k$$

$$= {}_2C_0\, x^2 y^0 + {}_2C_1\, xy + {}_2C_2\, x^0 y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2.$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{n-k}\, x^{n-k} y^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{n-k}\, x^k y^{n-k}$$

二項定理の
表現方法は様々.

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$

check

$n-k=l$ とおくと

- $k=n-l$
- $\sum_{k=0}^{n} = \sum_{l=0}^{n}$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k$$
$$= \sum_{l=0}^{n} {}_nC_{n-l}\, x^l y^{n-l}$$
$$= \sum_{l=0}^{n} {}_nC_l\, x^l y^{n-l}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k}$$

文字を l から k に
置きかえた.

//

二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{n-k} y^k$$

を $n=2$ のケースで説明.

$$(x+y)^2 = \underbrace{(x+y)}_{①} \cdot \underbrace{(x+y)}_{②}$$

これを展開するには

(1) ①②の各から x 又は y のいずれか一つを取り出してかけ合わせる。

(2) それを足す(全部)。

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$

- ①②の両方から x を取り出してかけると x^2 になる.
  その取り出し方は一通り.
  ∴ x^2 の係数は 1.
- y^2 の係数も, 同様に 1 になる.
- xy の係数はどうなるか?

  ①②から x を一つ選ぶ選び方の数は

  ${}_2C_1$

  一方から x を取り出せば, 他方からは y を取り出すことに決まる.

  ∴ xy の係数は ${}_2C_1$ となる。

$n=3$ のケース

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

① ② ③

この展開を考える。

(1) ①②③の各々から x 又は y のいずれかを取り出して、かけ合わせる。

(2) それらを全部足す。

このとき

- x^2y の係数はどうなるか？

①②③から x を2つ選ぶ選び方の数は

$_3C_2$

2つから x を取り出せば残り一つからは y を取り出すことに決まる。

∴ x^2y の係数は $\underline{{}_3C_2}$ である。

一般に

$$(x+y)^n = \underset{①}{\underline{(x+y)}}\,\underset{②}{\underline{(x+y)}}\cdots\cdots\underset{ⓝ}{\underline{(x+y)}}$$

の展開を考えるとき

・$x^{n-r}y^r$ の係数はどうなるか？

nコのかけ算の因子 ①, ②, …, ⓝ のうち

$n-r$コからxを取り出す.

その選び方の数は ${}_nC_{n-r} = {}_nC_r$ 通り,

nコのうち $n-r$コから xを取り出せば

残り rコからは yを取り出すことに決まる.

$\therefore$ $x^{n-r}y^r$ の係数は $\underline{{}_nC_r}$ である.

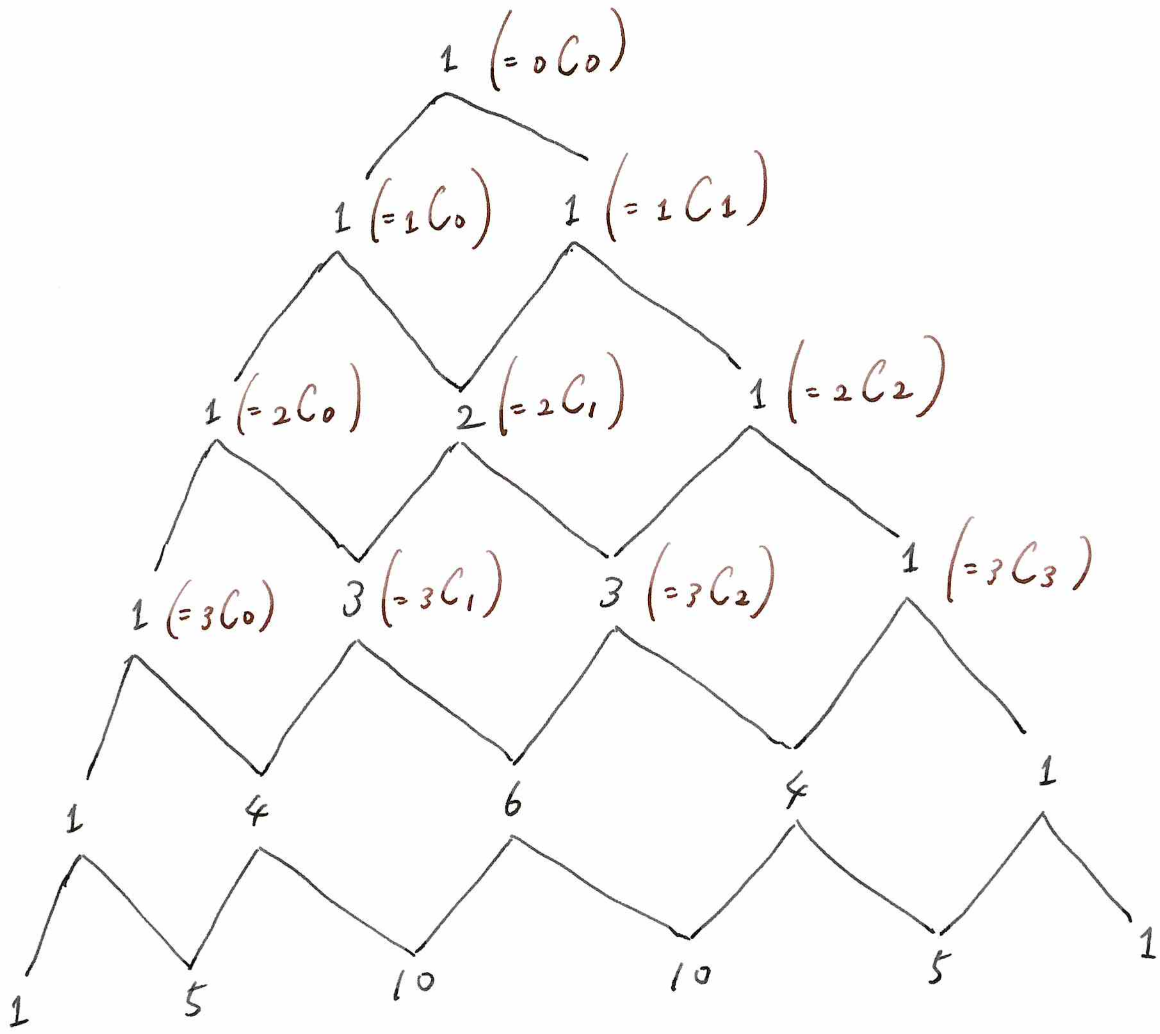
以上より

二項定理

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{n-k} y^k}$$

が成り立つ。

二項係数の覚え方〜パスカルの三角形



$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$\vdots$$

組合せ、二項定理

問題1. ある会社で10名でチームを組んで仕事をしている。この中から3名を選出して他のチームとの仕事の分担について話し合いを行う必要がある。何通りの選び方があるか？

問題2. ある会社のある部署では、大学の理系学部出身者は5人、文系学部出身者は10名、外国語学部出身者は4名在籍している。この中から、理系2名、文系3名、外国語学部出身者1名でチームを一つ作ることになった。何通りの組み合わせの数があるか？

問題3. 以下について、その値を求めなさい。また、その意味を小学生にもわかるように説明しなさい。

(1) ${}_nC_0$　(2) ${}_nC_1$　(3) ${}_nC_{n-1}$　(4) ${}_nC_n$

問題4. ある会社の部署には、5名の女性社員、4名の男性社員がおり、この中から2人のリーダーを選ぶことになった。当面、リーダーと副リーダーというように分けずに、二人のリーダーという体制にするという。以下の場合の選び方の数を求めなさい。

(1) 男女を問わず、9名から選ぶ場合。
(2) 女性だけの中から選ぶ場合。
(3) 男性だけの中から選ぶ場合。
(4) 男女から1人ずつ選ぶ場合。
(5) 少なくとも一人は女性が選ばれる場合。

問題5. 次の関係を証明し、その意味を直観的に説明しなさい。

(1) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$　(2) ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

問題6. レジュメの例などを参考にして、自分で組合せの応用例を考え、それに解答を与えよ。

問題7. 円順列、じゅず順列、重複順列、重複組合せについて調べ、ゼミで報告しなさい。

問題8. 二項定理とは、

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つというものである。

(1) 上式をシグマ記号を使わずに、最初の4項と最後の2項を実際に書いてみよ。
(2) $n = 1, 2, 3$ の場合のそれぞれについて、上の二項定理が正しいことを確認せよ。

解答

問題8.

（1）下の通り。

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^{n-0}y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1} + \binom{n}{n}x^{n-n}y^n$$

$$= \underline{x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}y^3 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n}$$

（2）$n = 1$の場合を示す。左辺は、$x+y$である。右辺は、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k \\ &= \binom{1}{0}x^{1-0}y^0 + \binom{1}{1}x^{1-1}y^1 \\ &= x+y \end{aligned}$$

となる。よって、両辺は等しい。