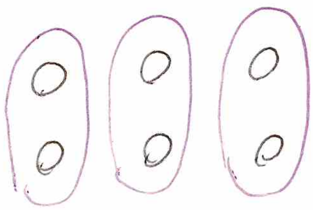
階乗，順列

わり算の意味：再考

わり算

① 分母の量を新たな１単位として
分子の量を測り直す試み。（包含除）

例



←ボールが６コ

２つずつ袋に入れる。

つまり ２コ＝１袋

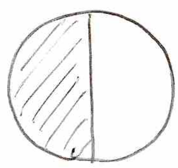
$2\,[\mathrm{コ}/\mathrm{袋}]$ １袋あたりボールは２コ

元々あった６コのボールは、３袋分。

$$\frac{6\,[\mathrm{コ}]}{2\,[\mathrm{コ}/\mathrm{袋}]} = 3\,[\mathrm{袋}]$$

例 $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ これはなぜか？

ケーキ１コを $\frac{1}{2}$（半分）にする。



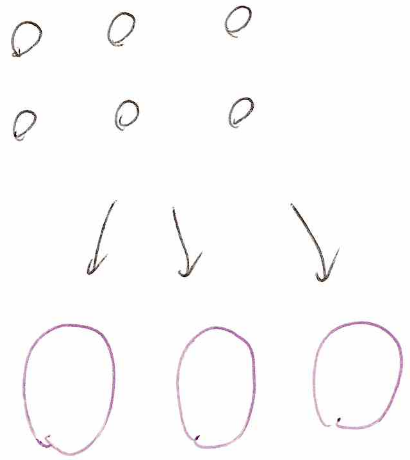
その半分を改めて１コと呼ぶ。

すると元のケーキは２コ分。

わり算

② 分子の量を分母の量に等しく分けると、
どれだけの値になるかを算出する試み。
(等分除)

例



6コのボール

3つの袋に
等しく分ける。

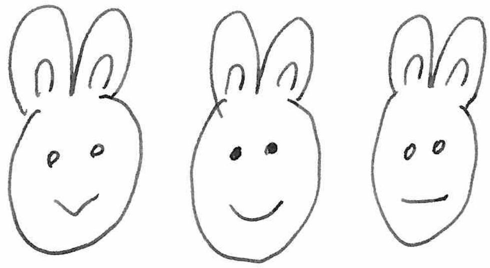
すると、一袋あたり、ボールは2コずつ

$$\frac{6\,[\text{コ}]}{3\,[\text{袋}]} = 2\,[\text{コ}/\text{袋}]$$

かけ算の意味：再考

かけ算 ---- 単位あたりの量が一定の場合に
全体の量を求める演算。

例.



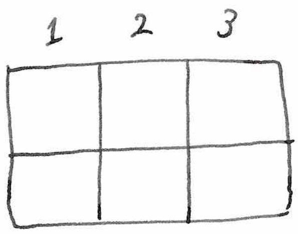
ウサギ 1 羽ごとに 耳が 2 本ある。

単位あたりの量　2 [本/羽]

ウサギは 3 羽いる。

全体の耳の数 ＝ 2 [本/羽] × 3 [羽] ＝ 6 [本]

例



1 列ごとにブロックが 2 つある. 3 列

全体のブロックは 何個？

全体のブロックの数

＝ 2 [個/列] × 3 [列] ＝ 6 [個]

※ かけ算は、わり算の逆演算.

かけ算は、わり算の逆演算。

- 全体の耳の数は6本

$$= 2\,[本/羽] \times \bigcirc\,[羽]$$

全体の6本の耳を 1羽あたり2本ずつウサギに
配分していくと ウサギ何羽分か？ (包含除)

$$\underline{3\,[羽]} = \frac{6\,[本]}{2\,[本/羽]}$$

- 全体の耳の数は6本

$$= \square\,[本/羽] \times 3\,[羽]$$

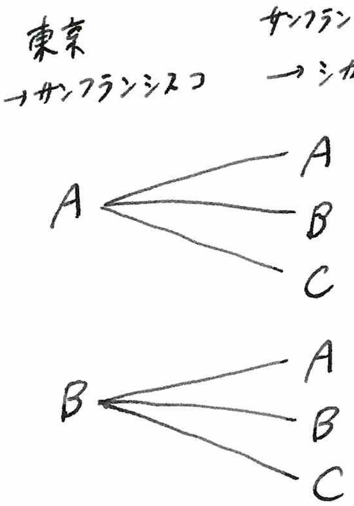
6本の耳を3羽のウサギに等しく分けると
1羽あたり耳は何本か？ (等分除)

$$\underline{2\,[本/羽]} = \frac{6\,[本]}{3\,[羽]}$$

積の法則

2つの事がらA, Bがあって、
Aの起こり方がm通り、Bの起こり方がn通り
しかも、Aの起こり方とBの起こり方は無関係とする。
このとき、AとBの起こり方の組合せ(場合の数)は、
$m \times n$ 通りである。

例
東京からサンフランシスコへ荷物を送り、そこから更にシカゴへ送る。
東京からサンフランシスコへ送るためには2社の航空会社(A, B)
の選択肢がある。
サンフランシスコからシカゴへ送るためには、アメリカ国内の
輸送業務をやっているC社も選択肢に加えることができる。
結局、東京からシカゴまで荷物を送るには何種類の
選択肢があるか?



東京→サンフランシスコの
2種類の選択肢について
それぞれに
サンフランシスコ→シカゴの
3種類の選択肢がある。

よって
$2 \times 3 = 6$ 通り

cf.

和の法則

あることがらEが、A, Bという2つの場合に場合分けすることができ、かつ、
Aがm通り、Bがn通りの場合から成る
ならば、Eは $m+n$ 通り の場合から成る。

例.
東京からサンフランシスコへ荷物を送る。
飛行機ではA, Bの2社の中から選ぶことができ、
船ではa, b, cの3社の中から選ぶことができる。
選択肢は全部でいくつあるか？

$2+3=$ 5通り

(A, B, a, b, c)

例.

ある会社のある部署

40代の社員	3人	(1), (2), (3)
30代 〃	2人	①, ②
20代 〃	4人	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$

が在籍している。

この中から各世代1人ずつの3人のチームを1つ選びたい。

何通りの組合せの数があるか？

解

1° まず30代と20代の組合せから考える。

30代の人①に対して、20代からの選び方は$\boxed{1}$〜$\boxed{4}$の4通りある。30代②に対しても同様に4通りの選び方がある。

30代1人あたり4通りの20代の選び方があり、30代は2人いるので、20代と30代の選び方は

$$2\,[\text{人}] \times 4\left[\text{通り}/\text{人}\right] = 8\ \text{通りある。}$$

2° 40代は(1), (2), (3)の3人おり、例えば、

(1)に対して、20代と30代の選び方は8通りある。

(2)と(3)に対しても同様。

従って全体でのチームの選び方は、

$$3\,[\text{人}] \times 8\left[\text{通り}/\text{人}\right] = \underline{24\ \text{通り}}。$$

$$\parallel$$

$$3 \times 2 \times 4$$

例

ある会社のある部署

50代社員 3人
40代 〃 4人
30代 〃 5人
20代 〃 10人

が在籍している。
この中から各世代1人ずつの4人のチームを1つ選びたい。
何通りの組合せの数があるか？

解

$3 \times 4 \times 5 \times 10 = 600$通り

例

あるレストランのコース料理

オードブル 3種類
メインディッシュ 4種類
デザート 5種類
ドリンク 10種類

これらの中から1種類ずつ選択できる。
何通りの組合せの数があるか？

解

$3 \times 4 \times 5 \times 10 = 600$通り

例.

1年は何時間[h]か？

1年 = 365日

1日あたり 24 h

$24\left[\frac{h}{日}\right]$ ← 単位あたりの量
これは一定.

$$\therefore 1年 = 24\left[\frac{h}{日}\right] \times 365\,[日]$$

$$= \underline{8760\ h}$$

例.

1年は何分か？

$$1年 = 60\left[\frac{分}{h}\right] \times 24\left[\frac{h}{日}\right] \times 365\,[日]$$

$$= \underline{52560\ 分}$$

階乗 factorial

nコの異なるものを一列に並べる並べ方の数。

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

例

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

① ② を並べる並べ方

1つ目	①	②
2つ目	②	①

← 選び方は2通り.

← 2つ目は選択の余地がない。(1通りしかない.)

よって ①, ② の並べ方は.

$2! = 2 \cdot 1 = 2$ 通り.

注意

$0! = 1$ と定める。

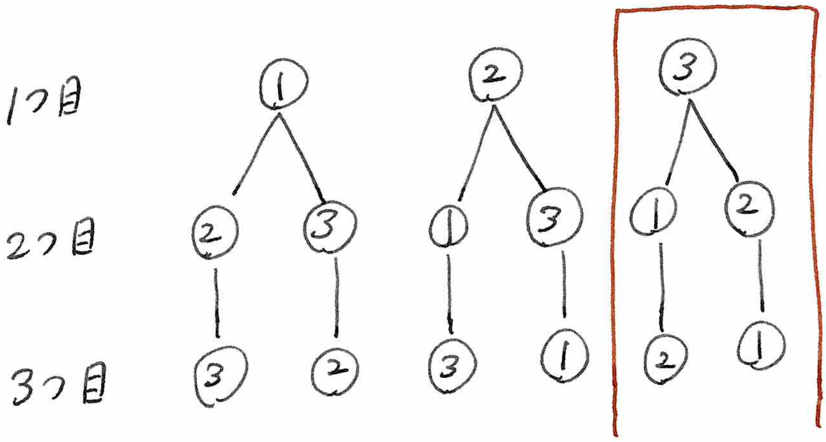
0コを並べるときの並べ方の数。

選択の余地がないので1通り。

例

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

① ② ③ を並べるときの並べ方



1つ目が③の場合について

2つ目の取り出し方は
2通り

3つ目は1通り
(選択の余地なし。)

2つ目以降の
並べ方が $2!$ 通りある。

1ブロックごとに $2!$ 通りの
並べ方がある。
それが3ブロック。
よってトータルで $3 \cdot 2! = 3!$ 通りの
並べ方がある。

4! についても同様

4つの異なるものを並べる

① ② ③ ④

- 1つ目に例えば①を選ぶと、残り3つ②③④を並べる並べ方の数は 3! 通り

- 1つ目の並び方は①〜④の4通りあり、それぞれについて 3! 通りの並べ方が付随する。

したがって $4 \cdot 3! = 4!$ 通りの並べ方がある。

順列　permutation

nコの異なったものからrコを取り出して一列に並べる。（順番に）
この列をnコのものからrコを取る順列という。

順列の数

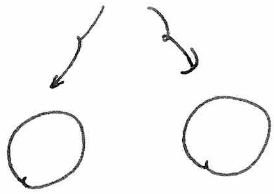
$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

nコのものからrコを取り出して並べる
その並べ方の数.

例.

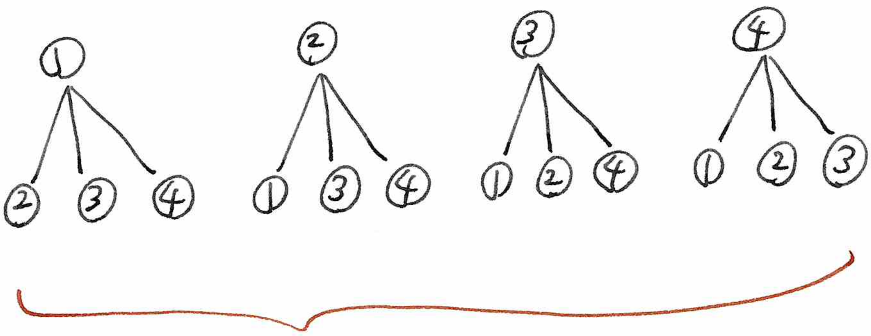
$$ {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4\cdot 3 = 12 $$

① ② ③ ④ ← 4コの異なったもの



2コ取り出して並べる。

4通り　3通り　$4\times 3 = 12$通り



…1回目
…2回目

$4\times 3 = 12$通り

12通り

(①, ②), (①, ③), (①, ④),

(②, ①), (②, ③), (②, ④),

(③, ①), (③, ②), (③, ④),

(④, ①), (④, ②), (④, ③)

☆ 順列においては、並べ方が大事なので、

(①, ②) と (②, ①) は区別する。

(注) ${}_nP_r$

- $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $n \geqq r$

説明

nコ並べるのは、n!通りの並べ方がある。

nコからrコ取り出して並べるとき、

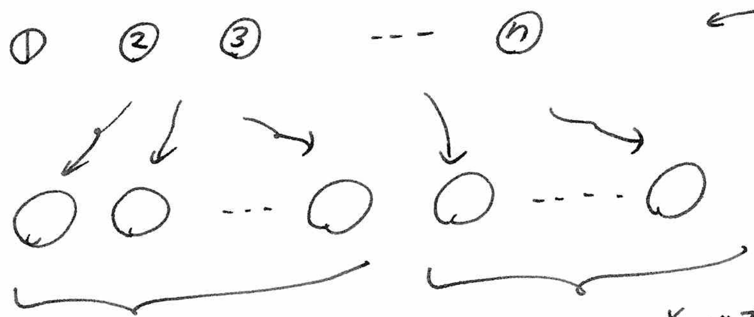
(n−r)コは並べない。

nコからrコ取り出して並べる順列は、

n!通りある並べ方のうち、(n−r)コの並べ方は

無視して、(それらを"ひとまとめにして")数えている

とみなすことができる。



nコ並べる並べ方は n!通りある。

rコ並べる。　　n−rコは並べない。

n−rコの並べ方は (n−r)!通り、

その違いは無視する。

(n−r)!コのものを"ひとまとめ"にして

n!をカウントし直す。

したがって nコからrコを取り出して並べるときの

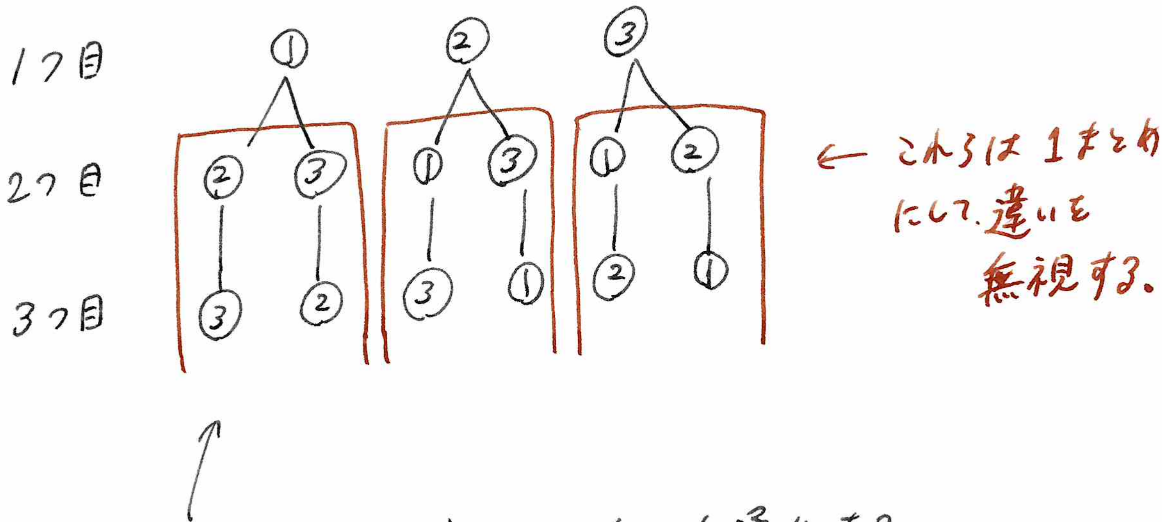
並べ方の数は、$_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ となる。

例

$$_3P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} = 3$$

3つのものから 1つ取り出す（取り出して並べる）。

その並べ方は3通り。



3つのものを並べる並べ方は $3! = 6$ 通りある。

3つから1つ取り出すということは $(3-1) = 2$ コは取り出さない。

したがって 2コの並べ方 $2! = 2$ は無視する。

□ の各ブロックごとに $(3-1)! = 2$ 通りの並べ方がある。

$2! = 2$ つずつをひとくくりにして $3! = 6$ を数え直す。

$$_3P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} = 3 \text{ 通り}$$

例.

部員7人からなる柔道部がある。

(1) 主将と副主将を選ぶ必要がある。
何通りの選び方があるか？

(2) 試合のために
先鋒, 次鋒, 中堅, 副将, 大将
を選ぶとき. 何通りの選び方があるか？

解

(1) $_7P_2 = \dfrac{7!}{(7-2)!} = 7 \cdot 6 = 42$ 通り

異なる7人から2人を選び順番に並べる
並べ方の数だから.

(2) 同様に考えて.

$$_7P_5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$= 2520$ 通り

例

ある会社のある部署

女性3人，男性4人，　合計7人　のチーム.

この中からリーダーと副リーダーを選ぶとする。

(1) 男女を問わず7人から2人選ぶ選び方は

何通りあるか？

$$_7P_2 = \frac{7!}{(7-2)!} = 7\cdot 6 = 42\text{通り。}$$

(2) 女性だけから両方選びたい。

この場合の選び方は何通りあるか？

$$_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3\cdot 2 = 6\text{通り。}$$

(3) 男性のみから選ぶ場合、選び方は何通りあるか？

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4\cdot 3 = 12\text{通り。}$$

(4) 男女1人ずつ選ぶ場合.

i) 女性からリーダーを選ぶ場合

$_3P_1 = 3$ ← 女性からリーダーを選ぶ選び方の数

$_4P_1 = 4$ ← 男性から副リーダーを 〃

$\therefore {}_3P_1 \times {}_4P_1 = 3\times 4 = 12$ 通りある。 ← 積の法則

ii) 男性からリーダーを選ぶ場合

同様に、$_3P_1 \times {}_4P_1 = 12$ 通り。

和の法則

i) or ii) なので　$12+12 = 24$ 通りの選び方がある。

① ${}_nP_0 = 1$

② ${}_nP_1 = n$

③ ${}_nP_{n-1} = n!$

④ ${}_nP_n = n!$

① ${}_nP_0 = 1$

check

$${}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1.$$

nコの異なるものから 0コ取り出して並べるとき、

その並べ方は？

全く並べないので 1通り。

② ${}_nP_1 = n$

check

$${}_nP_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

nコの異なるものから 1コ取り出して並べる

並べ方は n通り。

③ ${}_nP_{n-1} = n!$

check

$${}_nP_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

nコの異なるものからn-1コ取り出して並べるとき、
その並べ方の数だが、どうせ最後の1コの
並べ方は一意に決まるので、nコ並べる
並べ方の数n!に等しくなる。

④ ${}_nP_n = n!$

check

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

nコの異なるものからnコ取り出して並べるときの
並べ方なのでn!に等しい。

階乗、順列

問題1. 2 ÷ 2/3 ＝ 3となる理由を小学生にもわかるように説明しなさい。

問題2. ストレートとカーブを投げることができるピッチャーが3球投げるときの、投球パターンは何通りあるか？（たとえば、ストレート—カーブ—カーブなど。）

問題3. あなたの会社（日本）が、ドイツ、オランダ、デンマークの会社と合計4社で合併することが決まり、各会社から一人ずつ新会社の役員を選ぶことになった。それぞれの会社には5人（日本）、4人(ドイツ)、5人(オランダ)、6人（デンマーク)の役員がいる。新会社の役員は、何通りの組合せがあるか。

問題4. ある会社で10名でチームが組まれることになった。この中から議長、副議長、書記を選出する必要がある。何通りの選び方があるか？

問題5. ある会社の部署には、10名の社員がいる。この10人から何人か選んで自己紹介を社内報に掲載するとき、何通りの並び方があるだろうか？

（1）2人選ぶとき （2）3人選ぶとき （3）5人選ぶとき

問題6. 以下について、その値を求めなさい。また、その意味を小学生にもわかるように説明しなさい。

（1）${}_nP_0$ （2）${}_nP_1$ （3）${}_nP_{n-1}$ （4）${}_nP_n$

問題7. ある会社の部署には、5名の女性社員、4名の男性社員がおり、この中からリーダーと副リーダーを選ぶことになった。以下の場合の選び方の数を求めなさい。

（1）男女を問わず、9名から選ぶ場合。
（2）女性だけの中から選ぶ場合。
（3）男性だけの中から選ぶ場合。
（4）男女から1人ずつ選ぶ場合。

問題8. レジュメの例などを参考にして、自分で順列の応用例を考え、それに解答を与えなさい。